Probabilités conditionnelles et variables aléatoire (niveau 1ère)

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.
Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

- lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;
- lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

- C : « l'heure est creuse »
- T : « le terrain est occupé »

---

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.
3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.
4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\dfrac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés :

- 10 € pour une heure pleine,
- 6 € pour une heure creuse.

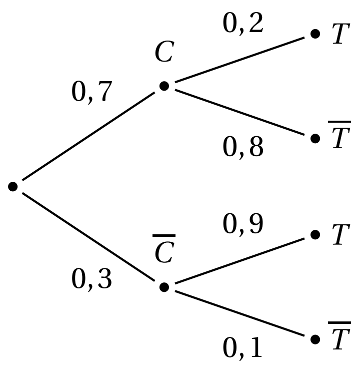
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
- 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
- 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.

5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X.
6. Déterminer l'espérance de X.
7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine.
   Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

Voir corrigé au verso !

1. A l'aide des données du texte, on obtient l'arbre suivant :



2. On cherche $P(C \cap T) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$

3. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales,
$P(T) = P(C \cap T) + P\left[\overline{C} \cap T\right] = 0,14 + 0,3 \times 0,9 = 0,41$

4. On cherche $P_T\left(\overline{C}\right) = \dfrac{P\left(T \cap \overline{C}\right)}{P(T)} = \dfrac{0,3 \times 0,9}{0,41} = \dfrac{27}{41}$

5. Pour déterminer la loi de probabilité de X :

— on dresse la liste des valeurs possibles de X

— on calcule la probabilité que X prenne chacune de ces valeurs

— on présente le tout dans un tableau

en s'aidant des données de l'arbre, on obtient :

X_i	0	6	10
$P(X = X_i)$	$0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 = 0,59$	0,14	$0,3 \times 0,9 = 0,27$

6. $E(X) = 0 \times 0,59 + 6 \times 0,14 + 10 \times 0,27 = 3,54$

7. Chaque terrain rapporte en moyenne 3,54 € pour une heure d'utilisation, le gain moyen hebdomadaire des 10 terrains sera donc de $10 \times 70 \times 3,54 = 2\,478$ €.