Corrigé Minibac n° 13 Equa diff Cent. étr 5 juin 2024

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

   On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right] \mathrm{d}x$

---

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0).
   On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.
   L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.
2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme
   $f(x) = C\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout réel x on a : $h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.
   D'autre part : $h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$
   d'où pour tout réel x, $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E).
4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = -\cos x - 3\sin x \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - f(x) = h'(x) - h(x) \quad (\text{car } h \text{ solution de } (E)) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (f-h)'(x) = (f-h)(x) \\
&\iff f - h \quad \text{solution de } (E_0)
\end{aligned}$$

5. On a donc $f(x) - h(x) = C\mathrm{e}^x$ avec $C \in \mathbb{R}$
   Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions
   $f(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$
6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que
   $g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.
   De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.
   D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2$
   On a donc : $g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.
7. Calculons : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,\mathrm{d}x$
   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$
   $I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right)$
   $I = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 0 + 2 \times 1 - (-2 - 1 + 2 \times 0) = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$