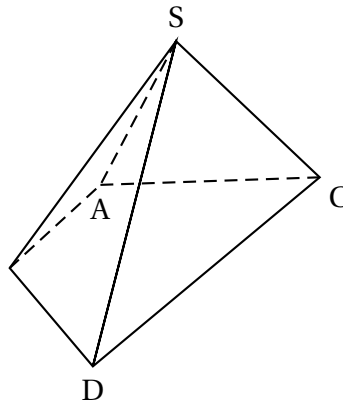


Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points : $A(3; -1; 1)$; $B(4; -1; 0)$; $C(0; 3; 2)$; $D(4; 3; -2)$ et $S(2; 1; 4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S , afin de calculer son volume.



- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
 - Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
- Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC) .
 - On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC) .
Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que $SI = 2$ cm.
- Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3; 3; -1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
 - Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.
On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

- Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.
On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

$$1. \text{ On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a $x \overrightarrow{AC} = -3x \overrightarrow{AB}$, mais $y \overrightarrow{AC} \neq -3y \overrightarrow{AB}$, les vecteurs sont donc non colinéaires, et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

- On sait que A, B et C ne sont pas alignés, et donc qu'ils définissent un plan. Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de montrer que D est un point du plan (ABC) , ce qui équivaut à prouver qu'un vecteur reliant un point du plan (ABC) au point D est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) .
Pas tout à fait au hasard (car on a regardé l'énoncé de la question suivante), on va choisir d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{CD}$ en fonction d'une base de (ABC) constituée des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dont on a déjà déterminé les coordonnées précédemment.

On a : $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-3 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

On remarque que l'on a : $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}.$

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ peut donc être écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc c'est un vecteur du plan (ABC), et puisque C est dans le plan (ABC), on en déduit que D est également dans (ABC).

Finalement, puisque D est dans (ABC), les quatre points A, B, C et D sont bien coplanaires.

- (b) À la question précédente, on a établi $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB} + 0 \times \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ étant colinéaires, les segments [AB] et [CD] sont portés par des droites parallèles (strictement, car C n'est pas aligné avec A et B).

ABCD est donc une figure plane (les quatre points étant coplanaires), c'est donc un quadrilatère, non croisé (puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de même sens, cela signifie que ABDC est non croisé, ABCD serait un quadrilatère croisé), dont les côtés [AB] et [DC] sont parallèles : le quadrilatère ABDC est donc bien un trapèze, de bases [AB] et [DC].

3. (a) Comme on est dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, on va utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire :

— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 2 + 0 - 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux;

— $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + 1 \times 4 + 2 \times 1 = -6 + 4 + 2 = 0$: $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont aussi orthogonaux;

$\vec{n}$ étant orthogonal à une base (deux vecteurs non colinéaires) du plan (ABC), on en déduit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- (b) $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ étant normal à (ABC), on en déduit que (ABC) admet une équation

de la forme : $2x + y + 2z + d = 0$, où d est un réel donné.

De plus, $A \in (ABC) \iff 2x_A + y_A + 2z_A + d = 0$

$$\iff 2 \times 3 + (-1) + 2 \times 1 + d = 0$$

$$\iff 6 - 1 + 2 + d = 0$$

$$\iff d = -7$$

Finalement, une équation de (ABC) est : $2x + y + 2z - 7 = 0$.

- (c) Si Δ est orthogonale à (ABC), cela signifie que $\vec{n}$, qui est normal à (ABC) doit diriger Δ . Et si la droite passe par S, de coordonnées (2 ; 1 ; 4), on en déduit qu'une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = x_S + \vec{x}_n t \\ y = y_S + \vec{y}_n t \\ z = z_S + \vec{z}_n t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{ce qui donne ici : } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(d) On nomme M_t le point de paramètre t sur la droite Δ .

$$\begin{aligned} M_t \in (ABC) &\iff 2x_{M_t} + y_{M_t} + 2z_{M_t} - 7 = 0 \\ &\iff 2(2+2t) + (1+t) + 2(4+2t) - 7 = 0 \\ &\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0 \\ &\iff 9t+6=0 \\ &\iff t = \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Il existe donc un unique point de Δ qui est sur le plan (ABC), c'est le point de paramètre $t = \frac{-2}{3}$ dans la représentation paramétrique. Ce point est donc le point I (ou bien $M_{\frac{-2}{3}}$), et a bien pour coordonnées : $\left(2+2 \times \frac{-2}{3}; 1+\frac{-2}{3}; 4+2 \times \frac{-2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a donc :

$$\begin{aligned} SI &= \sqrt{(x_I - x_S)^2 + (y_I - y_S)^2 + (z_I - z_S)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

On arrive bien à $SI = 2$ unités graphique, et comme $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est d'unité graphique 1 cm, on a bien $SI = 2$ cm.

4. (a) Avec les coordonnées données pour H, on a $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = 4 \times (-1) + 0 \times 4 + (-4) \times (-1) = -4 + 0 + 4 = 0$, donc les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (BH) et (CD) qu'ils dirigent sont orthogonales.

Par ailleurs : $\overrightarrow{CH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$, les points C, H et D sont alignés, donc H est sur la droite (CD).

H est donc le point de la droite (CD) tel que (BH) est orthogonale à (CD), donc c'est bien le projeté orthogonal de B sur (CD).

$$\text{On a } BH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

La distance BH est bien égale à $3\sqrt{2}$ cm.

(b) On a donc besoin de connaître les longueurs des deux bases du trapèze :

$$\text{— } AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ cm};$$

— Comme on a $\overrightarrow{CD} = 4 \times \overrightarrow{AB}$, on a notamment, $CD = |4| \times AB = 4\sqrt{2}$ cm.

$$\text{L'aire du trapèze ABDC est donc : } \mathcal{A}_{ABDC} = \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \text{ cm}^2$$

5. Finalement, le volume de la pyramide est : $\mathcal{V}_{ABDCS} = \frac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10 \text{ cm}^3$.