Corrigé Minibac n° 9

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4;5;1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

   On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoireX_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

---

1. Un tirage est donc un triplet (c'est-à-dire une 3-liste ou un 3-uplet) ordonné d'éléments choisis dans un ensemble E de cardinal $\text{Card}(E) = 8$ (il y a 8 jetons), qui ne s'amenuise pas (car on remet le jeton avant de tirer le suivant, et donc les répétitions sont possibles.)
   Le nombre de tirages possibles est donc de : $\text{Card}(E)^3 = 8^3 = 512$.
   Il y a 512 tirages possibles.
2. (a) Si on souhaite un tirage sans répétition de numéro, alors, c'est comme si on avait fait un tirage sans remise (un numéro déjà choisi ne peut pas être choisi à nouveau), et donc un triplet ordonné d'éléments choisis dans un ensemble qui s'amenuise.
   Il y a donc $\dfrac{8!}{(8-3)!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages possibles sans numéro répété.
   Remarque : On peut parler d'arrangement, même si ce mot n'est pas explicitement à connaître en terminale.
   On peut aussi voir cette valeur comme étant : 8 choix possibles pour le premier numéro du triplet, puis 7 choix possibles pour le deuxième numéro, sachant qu'il doit être différent du premier et enfin 6 choix possibles pour le dernier numéro, qui doit être différent des deux précédents.
   (b) Le nombre de tirages avec au moins une répétition de numéro est donc la différence des deux résultats précédents : $512 - 336 = 176$.
   En effet, l'ensemble des tirages possibles est la réunion de deux ensembles disjoints : les tirages sans aucune répétition de numéro et les tirages avec au moins une répétition de numéro.
   Remarque : On pouvait aussi compter le nombre de tirages avec deux numéros identiques : $8 \times \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \times 7 = 168$ (huit choix pour le numéro répété, multiplié par $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ façons de placer ces deux numéros identiques dans le triplet, multiplié par sept choix pour le numéro différent des deux premiers) et l'ajouter au nombre de tirages avec trois numéros identiques : 8 (huit choix possibles pour le numéro qui sera répété trois fois), mais dans ce cas, on obtient 176 sans le déduire des questions précédentes.

3. Le sac étant opaque et les jetons indiscernables au toucher, chaque sélection d'un jeton dans le sac est une situation d'équiprobabilité, et donc on a une loi équirépartie.
On peut donc présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 sous la forme du tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. L'espérance de la variable aléatoire X_1 est donc donnée par :
$$\begin{aligned}E(X_1) &= x_1 \times P(X_1 = x_1) + x_2 \times P(X_1 = x_2) + \dots x_8 \times P(X_1 = x_8)\\ &= \left(x_1 + x_2 + \dots + x_8\right) \times \frac{1}{8} \quad \text{car la loi est équirépartie}\\ &= \left(1+2+\dots+8\right) \times \frac{1}{8}\\ &= \frac{1+8}{2} \times 8 \times \frac{1}{8} \quad \text{avec la formule de la somme des premiers termes d'une suite arithmétique}\\ &= 4,5\end{aligned}$$

5. On a $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$, et puisque X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi de probabilité, alors on en déduit :
$E(S) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 4,5 = 13,5$

6. L'évènement $\{S = 24\}$ n'est réalisé que par le tirage (8 ; 8 ; 8), donc sur les 512 issues possibles de l'expérience aléatoire, une seule est favorable à l'évènement : la probabilité est donc de $\frac{1}{512}$ (puisque l'on est en situation d'équiprobabilité).
Remarque : On peut aussi dire que l'évènement $\{S = 24\}$ est égal à l'évènement $\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}$.
Et comme les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes :
$$\begin{aligned}P(S = 24) &= P\left(\{X_1 = 8\} \cap \{X_2 = 8\} \cap \{X_3 = 8\}\right) = P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8)\\ &= \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}\end{aligned}$$

7. (a) — Le nombre 24 ne peut être obtenu que par la somme 8 + 8 + 8, qui ne procède que d'un seul tirage (le tirage (8 ; 8 ; 8)).
— Le nombre 23 ne peut être obtenu que par la somme 7 + 8 + 8, cette somme est constituée d'un doublon (le 8) et d'un entier présent une seule fois (le 7).
Elle peut procéder de trois tirages différents, car il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons de placer les deux entiers identiques dans un triplet.
Les trois triplets conduisant à $\{S = 23\}$ sont : (7 ; 8 ; 8) ; (8 ; 7;8) et (8 ; 8 ; 7).
— Le nombre 22 peut être obtenu comme somme de trois entiers naturels entre 1 et 8 en faisant : 6 + 8 + 8, ou bien en faisant 7 + 7 + 8.
Chacune de ces sommes est constitué d'un doublon et d'un troisième entier différent, et est donc le résultat de trois tirages différents.
Il y a donc six tirages donnant 22 (les tirages (6 ; 8 ; 8) ; (8 ; 6 ; 8) ; (8 ; 8 ; 6) ; (8 ; 7 ; 7) ; (7 ; 8;7) et (7 ; 7 ; 8)).
On a donc bien finalement $1 + 3 + 6 = 10$ tirages conduisant au gain d'un lot.
(b) On est en situation d'équiprobabilité pour les 512 tirages possibles (nombre déterminé à la question **1.**), donc, avec 10 tirages favorables à l'évènement « gagner un lot », la probabilité de gagner un lot est donc de $\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$.