Corrigé Minibac n° 8

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1;1]$.
2. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$ (→ *piste pour J : une primit. de ... u est ...*)
3. Sachant que $\sin x \geqslant \cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, calculer, en unité d'aire du repère, l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions cos et sin sur cet intervalle.
4. * A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 x\ln(x)\,dx = \frac{17}{8}\ln 2 - \frac{15}{6}$.
5. * Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{0,5}^1 t^n \ln(t)\,dt$. Etudier son sens de variation
6. * Soit la suite (J_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $J_n = \displaystyle\int_1^n \ln\left(\frac{1}{x}\right)dx$. Etudier son sens de variation

---

1. Valeur moyenne μ de f sur l'intervalle $[-1;1]$: $\mu = \dfrac{1}{1-(-1)} \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx$

   Pour trouver une primitive de f, penser à écrire $f(x) = e^{-2x}$

   $$\mu = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{4}\left(e^2 - e^{-2}\right)$$

2. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx$

   Pour trouver une primitive , penser à écrire $\dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$

   Sachant que $x \mapsto x^n$ a prour primitive $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

   On obtient : $I = \left[\dfrac{1}{-3}x^{-3}\right]_1^2 = \left[\dfrac{-1}{3x^3}\right]_1^2 = \dfrac{-1}{24} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{24}$

   $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\,dx$

   $\sin x \cos x$ est de la forme $u'(x)\ u(x)$ avec $u(x) = \sin x$. Or une primitive de $u'\ u$ est $\dfrac{1}{2}u^2$.

   D'où $J = \left[\dfrac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}$

3. Sachant que $\sin x \geqslant \cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$, l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire du repère, du domaine délimité par les courbes des fonctions cos et sin sur cet intervalle est égal à :

   $$\mathscr{A} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
   $$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

4. Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x} \end{array}\right.$

   Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur l'intervalle $[\dfrac{1}{2}~;~2]$, on peut donc faire une intégration par parties :

   $J = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} - \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{x^2}{2} \times \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} - \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

   D'où $J = 2\ln 2 - 1 - \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{16} = 2\ln 2 - 1 + \dfrac{1}{8}\ln 2 + \dfrac{1}{16} = \dfrac{17}{8}\ln 2 - \dfrac{15}{6}.$

5. Pour tout entier n on a :

   $$I_{n+1} - I_n = \int_{0,5}^{1} t^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0,5}^{1} t^{n}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0,5}^{1} (t^{n+1} - t^n)\ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0,5}^{1} (t-1)\,t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Or sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, on a :
   - $t - 1 \leqslant 0$
   - $t^n \geqslant 0$
   - $\ln t \leqslant 0$

   D'où $(t-1)\,t^n\ln(t)$

   Donc $I_{n+1} - I_n = \geqslant 0$. La suite (I_n) est croissante.

6. Pour tout entier n on a :

   $$J_{n+1} - J_n = \int_{n}^{n+1} \ln\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{n}^{n+1} (-\ln x)\,\mathrm{d}x.$$

   Or sur $[1;+\infty]$, donc sur tout intervalle $[n;n+1]$, on a : $-\ln x \leqslant 0$

   D'où $J_{n+1} - J_n \leqslant 0$. La suite (J_n) est décroissante.