Corrigé Minibac n° 6

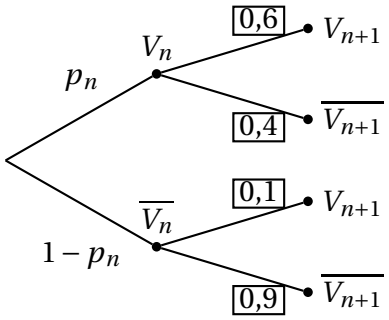
Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.
Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
2. On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.
   (a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.



1. V_n et $\overline{V_n}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la loi des probabilités totales, on a :
   $p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p\left(V_{n+1} \cap \overline{V_n}\right)$
   $= p_n \times 0,6 + \left(1 - p_n\right) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1.$
2. (a) Pour tout entier naturel n non nul :

   $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5\left(p_n - 0,2\right) = 0,5u_n.$

   Cette égalité montre que la suite u est une suite géométrique de raison $0,5$; son premier terme est $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

   (b) On sait que pour tout entier naturel n non nul $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

   De la définition de u_n il résulte que $p_n = u_n + 0,2 = 0,2 + 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

   (c) On sait que $-1 < \frac{1}{2} < 1$ entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,2$.