Corrigé Minibac n° 2

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 1.
2. Etudier les variations de f sur $] -\infty; 1[$.
3. On admet que $f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$ sur $] -\infty; 1[$.
 - (a) Etudier la convexité de f sur $] -\infty; 1[$.
 - (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
 - (c) En déduire que, sur $] -\infty; 1[$, on a : $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$

1. La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e^1 = e > 0$.

Par somme, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$, et comme $x - 1 < 0$ sur $] -\infty; 1[$, on peut noter $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^-$.

Par quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

N.B. On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.

2. f est dérivable sur $] -\infty; 1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\begin{aligned} \forall x \in] -\infty; 1[, \quad f'(x) &= \frac{e^x \times (x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^x \times (x-1-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $] -\infty; 1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$, donc sur $] -\infty; 1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty; 1[$:

x	$-\infty$	1
signe de $f'(x)$	-	-
variations de f	0	$-\infty$

3. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty; 1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $] -\infty; 1[$, on a $(x-1) < 0$ et donc $(x-1)^3 < 0$ et $e^x > 0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : $x^2 - 4x + 5$.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x .

Rem. On peut écrire :

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1 > 0 : \text{le trinôme est positif quel que soit } x \in \mathbb{R}.$$

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $] -\infty; 1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $] -\infty; 1[$.

(b) Pour déterminer l'équation de T , il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

$$- f'(0) = \frac{(0-2)e^0}{(0-1)^2} = \frac{-2}{1} = -2;$$

$$- f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

La formule classique donne une équation pour T :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x - 1$$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

(c) Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, la courbe $\mathcal{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T , sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T , l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x - 1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $x \in]-\infty; 1[\implies f(x) \leq -2x - 1$

$$\implies \frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$$

$$\implies e^x \geq (x-1)(-2x-1)$$

car sur $]-\infty; 1[$, $x-1 < 0$

$$\implies e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.