**Corrigé Minibac n° 1**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On considère : - les points A$(-2\ ;\ 0\ ;\ 2)$, B$(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$, C$(1\,;\,-1\,;\,2)$,et D$(0\,;\,0\,;\,3)$.

- la droite $\Delta_1$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 3t \\ z & = & 3+5t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$.

- la droite $\Delta_2$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3s \\ y & = & -1-5s \\ z & = & 2-6s \end{array}\right. \quad (s \in \mathbb{R})$.

1. Justifier que la droite $\Delta_1$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

   On admet que la droite $\Delta_2$ est la hauteur du tétraèdre ABCD issue de C.

2. Démontrer que les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

---

1. Une équation paramétrique de $\Delta_1$ est : $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

   D'une part : pour $t = 0$, on a $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \times 0 = 0 \\ z = 3+5 \times 0 = 3 \end{cases}$.

   On reconnait les coordonnées du point D, donc D appartient à la droite $\Delta_1$.

   D'autre part : un vecteur directeur de $\Delta_1$ est donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.

   Montrons que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan(ABC).

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times -2 = 1 + 9 - 10 = 0$

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times -1 + 5 \times 0 = 3 - 3 + 0 = 0$

   Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

   Donc la droite $\Delta_1$ est orthogonale au plan (ABC).

   Donc la droite $\Delta_1$ est bien la hauteur du tétraèdre ABCD issue de D.

2. Pour déterminer les points éventuels d'intersection des droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ résolvons le système (S) :

   $\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}$

   (S) $\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3 \times (1+3s) = -1-5s \\ 3+5 \times (1+3s) = 2-6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases}$

   (S) $\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1+3s = 1+3 \times \dfrac{-2}{7} = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{4}{14} = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{6}{21} = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$

Le système admet une unique solution donc les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont sécantes.
Remplaçons $t$ par $\dfrac{1}{7}$ dans l'équation paramétrique de $\Delta_1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = 3 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{3}{7} \\ z = 3 + 5 \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{26}{7} \end{cases}$$

Les droites $\Delta_1$ et $\Delta_2$ sont donc sécantes et les coordonnées de leur point d'intersection sont $\left(\dfrac{1}{7}\,;\,\dfrac{3}{7}\,;\,\dfrac{26}{7}\right)$.