A. Maitrise du symbole $\sum$

Ex 1

$$S_1 = 1+2^3+3^3+\dots+150^3 = \sum_{p=1}^{150} p^3$$

$$S_2 = \frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{66} = \sum_{j=3}^{33}\frac{1}{2j}$$

$$S_3 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{29} = \sum_{p=0}^{14}(-1)^p\frac{1}{2p+1}$$

Ex 2 Parmi les expressions proposées, déterminer celles qui sont égales :

$$\sum_{p=1}^{n} p.n = \sum_{k=1}^{n} n.k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)n = \frac{n(n+1)}{2}n \qquad k\left(\sum_{k=1}^{n} n\right) = k(n\times n) = kn^2$$

Ex 3 Parmi les expressions proposées, déterminer celles qui sont égales :

a/ $$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}\, b_{n+1-k} = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2-\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$$

b/ $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(a_k b_p) = \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\sum_{p=1}^{n} b_p\right)$$

B. Sommes de termes de suites particulières

Ex 4 Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ (termes consécutifs d'une suite arith. $r=1$)

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 = \frac{1+2n-1}{2}\times n = n^2$$ (termes consécutifs d'une suite arith. $r=2$)

$$U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2-k = \frac{4-n-3-n}{2}\times 8 = 4-8n$$ (... $r=-1$)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n$$

$$W_n = \sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} p = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$X_n = \sum_{k=n-2}^{n+5}\frac{4}{2^k} = 4\sum_{k=n-2}^{n+5}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$$

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{5k-4}}{7^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^{5k}\,2^{-4}}{7^{2k}\,7^1} = \frac{2^{-4}}{7}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^5}{7^2}\right)^k = \frac{1}{7\times 2^4}\,\frac{1-\left(\frac{2^5}{7^2}\right)^{n+1}}{1-\frac{2^5}{7^2}}$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k = e^{\frac{2i\pi}{n}}\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = e^{\frac{2i\pi}{n}}\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0 \quad \text{car } e^{2i\pi}=1$$

Ex 5 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $T_n = S_n^2$.

- *Initialisation* : pour $n=1$, $T_1 = 1$ et $S_1 = 1$.
  On a bien $T_1 = S_1^2$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.
- *Hérédité* : on suppose que $T_n = S_n^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, pour un entier n donné.

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n+(n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

  on a ainsi montré que si $\mathscr{P}_n$ est vraie, alors $\mathscr{P}_{n+1}$ l'est aussi.
- La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire ; donc d'après le principe de récurrence $T_n = S_n^2$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

B. Techniques de calcul

Ex 6 Calculer les sommes suivantes **en utilisant un télescopage** :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-\sum_{k=3}^{n}\sqrt{k+1} \\ &= \sum_{k=3}^{n}\sqrt{k}-\sum_{k=4}^{n+1}\sqrt{k} \\ &= \sqrt{3}-\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) \;-\; \sum_{k=1}^{n}\ln k\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) \;-\; \sum_{k=1}^{n}\ln k\\ &= \ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\end{aligned}$$

<u>Ex 7</u>

1. $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}=\ldots=\dfrac{2}{k(k+2)}$
2. $$\begin{aligned}2S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\end{aligned}$$
   Donc $S_n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

<u>Ex 8</u>

1. Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
   $$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ P(x+1)-P(x) &= a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d-(ax^3+bx^2+cx+d)\\ &= a(3x^2+3x+1)+b(2x+1)+c\\ &= 3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c\end{aligned}$$
   On cherche a,b,c tels que : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x+1)-P(x)=x^2$

   D'où par identification des coefficients : $\left\{\begin{array}{lcl} a &=& \frac{1}{3}\\ 3a+2b &=& 0\\ a+b+c &=& 0\end{array}\right.$

   Donc $a=\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{1}{2}$ et $c=\dfrac{1}{6}$

   On peut poser $P(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x$
2. $S_n=\sum_{k=0}^{n}k^2=\sum_{k=0}^{n}(P(k+1)-P(k))=\sum_{k=0}^{n}P(k+1)-\sum_{k=0}^{n}P(k)=P(n+1)-P(0)$

   $S_n=\dfrac{1}{3}(n+1)^3-\dfrac{1}{2}(n+1)^2+\dfrac{1}{6}(n+1)$

<u>Ex 9</u>

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}j.k=\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{k=1}^{n}k\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(j\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}j=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1-1).k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1).k!-\sum_{k=1}^{n}k!=\sum_{k=1}^{n}(k+1)!-\sum_{k=1}^{n}k!=(n+1)!-1!$$

<u>Ex 10</u> Simplifier les sommes suivantes **en sommant par paquets** :

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\,k &= \boxed{\text{-1 +2}}+\boxed{\text{-3 +4}}+\ldots+\boxed{\text{- (2n-1) + 2n}}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-(2k-1)+2k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}1=\text{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_n=\sum_{k=0}^{2n}\min(k,n) &= \sum_{k=0}^{n}\min(k,n)+\sum_{k=n+1}^{2n}\min(k,n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}n\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n^2\\ &= \frac{3n^2+n}{2}\end{aligned}$$

<u>Ex 11</u>

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1-k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=0$$

<u>Ex 12</u>

1. $\forall t>1,\ \dfrac{1}{t^2-1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{t-1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{t+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)$
2. $S_n=\sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2-1}=\dfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$