Objectif de ce problème : encadrer le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$

1. (a) $(a+b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k}$

   (b) $4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n} \geqslant \binom{2n}{n}$ car tous les termes de cette somme sont positifs, donc la somme est supérieure à chacun de ses termes.

2. (a) pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!}\\ &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1))!}\\ &= \frac{n!}{(k)!\,(n-k))!} = \binom{n}{k}\end{aligned}$$

   en effet : $\frac{n-k+1}{(n-k+1)!} = \frac{n-k+1}{1\times 2\times \dots \times (n-k)\times(n-k+1)} = \frac{1}{(n-k)!}$

   et $\quad k\times(k-1)! = k!$

   (b) $\forall k \in \left[\!\left[1;\frac{n}{2}\right]\!\right]$, on a : $-\frac{n}{2} \leqslant -k \leqslant -1$

$$-\frac{n}{2}+n+1 \leqslant n-k+1 \leqslant n$$

$$\frac{n}{2}+1 \leqslant n-k+1 \leqslant n$$

   De plus on a : $\frac{2}{n} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant 1$

   D'où par produit : $1+\frac{2}{n} \leqslant \frac{n-k+1}{k} \leqslant n$

   Donc on a : $\frac{n-k+1}{k} > 1$

   Or $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

   D'où : $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$

3. (a) Posons $p = k+1$

   Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a : $\quad p \in [\![1;n]\!]$

   Donc d'après la 2. a. on a : $\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

   Donc on a bien : $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$

   (b) $\forall k \in \left[\!\left[\frac{n}{2};n-1\right]\!\right]$, on a : $\quad 1-n \leqslant -k \leqslant -\frac{n}{2}$

$$1 \leqslant n-k \leqslant \frac{n}{2}$$

   De plus on a : $\quad \frac{n}{2}+1 \leqslant k+1 \leqslant n$

   donc : $\quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{\frac{n}{2}+1}$

   D'où par produit : $\frac{1}{n} \leqslant \frac{n-k}{k+1} \leqslant \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1}$

   Donc on a : $\frac{n-k}{k+1} < 1$

   Or $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$ $\qquad$ D'où : $\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$

4. Soit $k \in [\![0;2n]\!]$.

   (a) • Si $k \leqslant n$, d'après le 2. b. on a $\binom{2n}{k-1} < \binom{2n}{k}$

   Ainsi $\binom{2n}{0} < \binom{2n}{1} < \dots < \binom{2n}{k} < \dots < \binom{2n}{n}$

   • Si $k \geqslant n$, d'après le 3. b. on a $\binom{2n}{k} > \binom{2n}{k+1}$

   Ainsi $\binom{2n}{n} > \binom{2n}{n-1} > \dots > \binom{2n}{k} > \dots > \binom{2n}{2n}$

   • <u>Bilan</u> : $\binom{2n}{k} < \binom{2n}{n}$

   (b) $4^n = 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \binom{2n}{0} + \dots + \binom{2n}{n} + \dots + \binom{2n}{2n} \leqslant (2n+1)\binom{2n}{n}$

   car d'après le 4. a. chacun des $2n+1$ termes de cette somme est majoré par $\binom{2n}{n}$.

   Ainsi, on a bien $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n+1}$

Bilan : on a démontré l'encadrement $\boxed{\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n}$