Fiche 1 - Calcul de sommes	**TS Experts**

A. Maitrise du symbole $\sum$

Ex 1 Ecrire à l'aide du symbole $\sum$:

$S_1 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 150^3$

$S_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{66}$

$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{29}$

Ex 2 Parmi les expressions proposées, déterminer celles qui sont égales :

$$\sum_{p=1}^{n} p.n \qquad \sum_{k=1}^{n} n.k \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) n \qquad k\left(\sum_{k=1}^{n} n\right)$$

Ex 3 Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$.
Parmi les expressions proposées, déterminer celles qui sont égales :

a/ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}\, b_{n+1-k} \qquad \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$

b/ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right) \qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(a_k b_p)$

$\sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{p=1}^{n} b_p\right) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

B. Sommes de termes de suites particulières

Ex 4 Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} 2k-1 \qquad U_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} 2-k \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} 2$$

$$W_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{n} \qquad X_n = \sum_{k=n-2}^{n+5} \frac{4}{2^k} \qquad Y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{5k-4}}{7^{2k+1}} \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Ex 5

On pose $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} k \quad$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

Rappeler l'expression de S_n et montrer que $T_n = S_n^2$

B. Techniques de calcul

Ex 6 Calculer les sommes suivantes **en utilisant un télescopage** :

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Ex 7

1. Vérifier que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{2}{k(k+2)}$
2. En déduire $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

Ex 8

1. Trouver un polynôme P de degré 3 tel que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) - P(x) = x^2$
2. En déduire $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

Ex 9 Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} j.k \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} k.k!$$

(ruse : $\quad$ k = k + 1 - 1)

Ex 10 Simplifier les sommes suivantes **en sommant par paquets** :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k\, k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$$

Ex 11 Calculer la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$$

Ex 12

1. Trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\quad \forall t > 1,\ \frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}$

   $\longrightarrow$ Décomposition de la fraction rationnelle en éléments simples
2. En déduire une expression simplifiée de la somme $\quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$