Ex 1 Développer les expressions suivantes :

$A=(a+b)^6$ $\qquad$ $B=(2x-1)^5$

Ex 2 Simplifier la somme suivante, où n est un entier naturel :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}3^{n-k+1}\binom{n}{k}$$

Ex 3 Soit n un entier naturel donné.

Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$

Ex 4

Quel est le coefficient du terme en $a^4b^2c^3$ dans la forme développée de $(a-b+2c)^9$?

Ex 5

Rappel : $\boxed{\cos x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}}$ (formule d'Euler)

1. Linéariser $\cos^6 x$ en utilisant la formule d'Euler et la formule du binôme.

   $\longrightarrow$ Linéariser = "écrire l'expression sans exposant"

2. En déduire $\displaystyle\int\cos^6(x)\,\mathrm{d}x$

Ex 6 Encadrement du coefficient binomial $\dbinom{2n}{n}$

Rappel : si m et p entiers tels que $m<p$, on note $[\![m;p]\!]=\{k\in\mathbb{Z}|m\leqslant k\leqslant p\}$
Autrement dit, c'est l'ensemble des entiers compris entre m et p.

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Soient a et b deux réels. Ecrire la formule du binôme de Newton pour $(a+b)^{2n}$
   (b) En déduire que $\dbinom{2n}{n}\leqslant 4^n$
2. (a) Démontrer que, pour tout $k\in[\![1;n]\!]$, on a : $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n-k+1}{k}\dbinom{n}{k-1}$
   (b) En déduire que pour tout entier k tel que $1\leqslant k\leqslant\dfrac{n}{2}$, on a : $\dbinom{n}{k-1}<\dbinom{n}{k}$
3. (a) Déduire du **2. a.** que, pour tout $k\in[\![0;n-1]\!]$, on a : $\dbinom{n}{k+1}=\dfrac{n-k}{k+1}\dbinom{n}{k}$
   (b) En déduire que pour tout entier k tel que $\dfrac{n}{2}\leqslant k\leqslant n-1$, on a : $\dbinom{n}{k}>\dbinom{n}{k+1}$
4. Soit $k\in[\![0;2n]\!]$.
   (a) Comparer $\dbinom{2n}{k}$ et $\dbinom{2n}{n}$
   (b) En déduire que $\dbinom{2n}{n}\geqslant\dfrac{4^n}{2n+1}$