1. **a.** Soit F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=x\ln x-x$.
F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.
Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $F'(x)=1\times\ln x+x\times\ln x-1=\ln x=f(x)$; par conséquent $F'=f$ donc F est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

On en déduit que : $I=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x=F(\mathrm{e})-F(1)=(\mathrm{e}\ln\mathrm{e}-\mathrm{e})-(1\ln 1-1)=0-(-1)=1$. $\boxed{I=1}$.

b. $J=\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.
En posant $u(x)=(\ln x)^2$ et $v'(x)=1$, on a $J=\int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
u, v, u' et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.
On a : $u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x)=x$
$J=[u(x)v(x)]_{1^{\mathrm{e}}}-\int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x=\left[x(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}} 2\dfrac{\ln x}{x}\times x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2I$; $\boxed{J=I-2I}$.

c. Puisque $I=1$, on obtient : $\boxed{J=\mathrm{e}-2}$.

d. Pour tout x de $[1\,;\,\mathrm{e}]$, $0\leqslant\ln x\leqslant 1$ donc $0\leqslant(|nx)^2\leqslant\ln x$ donc $g(x)\leqslant f(x)$.

Par conséquent : $A=\int_1^{\mathrm{e}}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x=I-J=3-\mathrm{e}$.
$\boxed{A=3-\mathrm{e}}$.

2. On a : $MN=\ln x-(\ln x)^2$. Posons $h(x)=\ln x-(\ln x)^2$.
h est dérivable : pour tout x de $[1\,;\,\mathrm{e}]$, $h'(x)=\dfrac{1}{x}-2\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{1-2\ln x}{x}$.
$h'(x)=0 \iff \ln x=\dfrac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.
Puisque x est positif, $h'(x)$ est du signe de $1-2\ln x$.
$1-2\ln x>0 \iff \ln x<\dfrac{1}{2} \iff x<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \iff x<\sqrt{\mathrm{e}}$.
On en déduit le tableau de variations de h :

x	1		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	$h(\sqrt{\mathrm{e}})$	$\searrow$	

Par conséquent, $h(x)$ a un maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.
$h(\sqrt{\mathrm{e}})\ln(\sqrt{\mathrm{e}})-(\ln(\sqrt{\mathrm{e}}))^2=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.
MN est maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ et vaut alors $\dfrac{1}{4}$.