

1. a. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$.
 F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.
 Pour tout x de $]0; +\infty[$, $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \ln x - 1 = \ln x = f(x)$; par conséquent $F' = f$ donc F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

On en déduit que : $I = \int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1$. $I = 1$.

b. $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

En posant $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, on a $J = \int_1^e u(x)v'(x) dx$.

u, v, u' et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On a : $u'(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$ et $v(x) = x$

$J = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x) dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \frac{\ln x}{x} \times x dx = e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2I$; $J = I - 2I$.

c. Puisque $I = 1$, on obtient : $J = e - 2$.

d. Pour tout x de $[1; e]$, $0 \leq \ln x \leq 1$ donc $0 \leq (\ln x)^2 \leq \ln x$ donc $g(x) \leq f(x)$.

Par conséquent : $A = \int_1^e [f(x) - g(x)] dx = \int_1^e f(x) dx - \int_1^e g(x) dx = I - J = 3 - e$.

$A = 3 - e$.

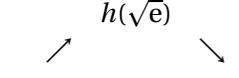
2. On a : $MN = \ln x - (\ln x)^2$. Posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$.
 h est dérivable : pour tout x de $[1; e]$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} = \frac{1 - 2 \ln x}{x}$.

$h'(x) = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Puisque x est positif, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2 \ln x$.

$1 - 2 \ln x > 0 \iff \ln x < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}} \iff x < \sqrt{e}$.

On en déduit le tableau de variations de h :

x	1	\sqrt{e}	e
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$h(\sqrt{e})$ 		

Par conséquent, $h(x)$ a un maximum pour $x = \sqrt{e}$.

$h(\sqrt{e}) \ln(\sqrt{e}) - (\ln(\sqrt{e}))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

MN est maximum pour $x = \sqrt{e}$ et vaut alors $\frac{1}{4}$.