On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.

On définit, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx.$$

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\quad e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$.
5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{2^n}{n!}$.
   - **a.** Prouver que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\; u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\; 0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n).
7. Justifier enfin que :

$$\boxed{e^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right)}$$

autre écriture post-bac : on écrit le nombre e^2 comme **la somme d'une série convergente**

$$\boxed{e^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}}$$