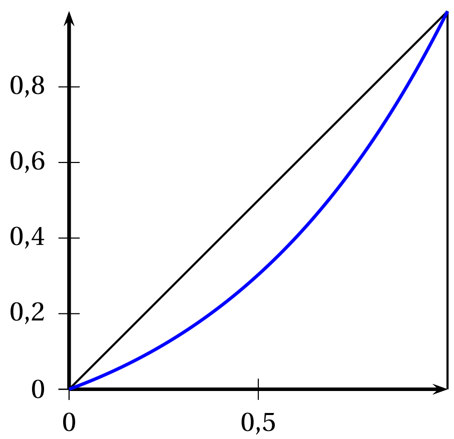
On s'intéresse à des courbes servant de modèle à la distribution de la masse salariale d'une entreprise. Les fonctions f associées définies sur l'intervalle $[0;1]$ doivent vérifier les conditions suivantes :
(1) $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
(2) f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$
(3) Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f(x) \leqslant x$.

I. Première partie étude d'un modèle

On appelle g la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $\quad g(x) = x\mathrm{e}^{x-1}$

1. Prouver que g vérifie les conditions (1) et (2).
2. Montrer que $g(x) - x = \dfrac{x}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}\right)$ et en déduire que g vérifie la condition (3).
   Illustration : on a tracé ci-dessous les droites d'équations $y = x$ et $x = 1$ et la courbe représentative de g dans un repère $\mathscr{R}$.



II. Seconde partie Un calcul d'indice

Pour une fonction f vérifiant les conditions (1), (2) (3), on définit un indice I_f égal à l'aire exprimée en unité d'aire, du domaine plan M délimité par les droites d'équations $y = x$, $x = 1$ et la courbe représentative de f.

1. Justifier que $I_f = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f(x)\right] \mathrm{d}x$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'indice I_g, associé à g.
3. On s'intéresse aux fonctions f_n, définies sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $\quad f_n(x) = \dfrac{2x^n}{1+x}$
   où n est un entier naturel supérieur en égal à 2.
   On admet que ces fonctions vérifient les conditions (1), (2), (3) et on se propose d'étudier l'évolution de leur indice I_n lorsque n tend vers l'infini.

   On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left[x - f_n(x)\right] \mathrm{d}x$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Prouver que $\quad I_n = \dfrac{1}{2} - u_n$.
   b. Comparer $\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\dfrac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle $[0;1]$; en déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^n$
   d. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n+1}$.
   e. Déterminer alors la limite de I_n quand n tend vers l'infini.