∽ Corrigé du travail de groupe sur les similitudes (Bac Asie 2012) ∾

Partie A : Détermination d'une similitude directe.

1. **a.** On a :
   - $z_A = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   - $z_B = -\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{5i\pi}{6}}$.

   b. Voir figure.

2. **a.** La transformation f est une similitude directe donc elle admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.

   Comme $f(A) = B$ et $f(O) = O$, les complexes a et b vérifient le système $\begin{cases} 0 = a \times 0 + b \\ 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = a\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}} + b \end{cases}$ donc

   $\begin{cases} b = 0 \\ a = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \end{cases}$.

   Donc l'écriture complexe de f est $z' = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} z$.

   b. On sait que f est une similitude directe de centre O.

   De plus on sait que le rapport de f est donné par $\left|2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right| = |2|\left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right| = 2$ puisque $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ quel que soit le réel θ et que l'angle de f est donné par $\arg\left(2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Partie B : étude d'une transformation

1. **a.** La transformation g est la composée de f suivie de s.

   Or l'écriture complexe de f est $z' = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} z$ et l'écriture complexe de s est $z' = \overline{z}$.

   Par suite l'écriture complexe de $g = s \circ f$ est $z' = s\left(2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} z\right) = \overline{2\mathrm{e}\frac{\mathrm{i}\pi}{6} z} = \overline{2} \times \overline{\mathrm{e}\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \times \overline{z} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{z}$.

   b. On a $z_A = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et $g(A) = C$ donc $z_C = z_{A'} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{z_A} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{3}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.

   On a $g(C) = D$ d'où $z_D = z_{C'} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{z_C} = 2\mathrm{e}{-}\frac{\mathrm{i}\pi}{6} \times \overline{2\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}} = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}} \times 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

   Voir figure.

   c. On a $\dfrac{z_C}{z_A} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2\mathrm{e}^{-\frac{3\mathrm{i}\pi}{2}} = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = 2\mathrm{i}$.

   Par suite comme $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)$ et comme $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg(2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAC est rectangle en O.

   d. On a $\dfrac{z_D}{z_A} = \dfrac{4\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = 4 \in \mathbb{R}^*$.

   Alors comme $\dfrac{z_{\overrightarrow{OD}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \dfrac{z_D - z_O}{z_A - z_O} = \dfrac{z_D}{z_A} = 4$ on en déduit $z_{\overrightarrow{OD}} = 4z_{\overrightarrow{OA}}$ d'où $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont donc colinéaires.

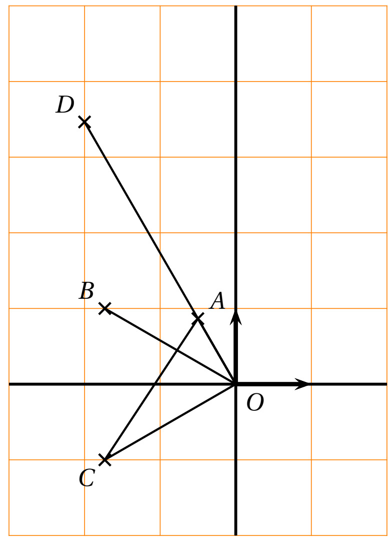
2. L'écriture complexe de la composée $g \circ g$ est $z' = g(g(z)) = g\left(2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{z}\right) = 2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{2\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{z}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\overline{\overline{z}} = 4z$.

   Par conséquent, comme $4 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on en déduit que la transformation $g \circ g$ est une homothétie de rapport 4.

   Remarquons que $g(g(O)) = g(O) = O$ donc O est l'unique point invariant de cette homothétie, c'est-à-dire son centre.

   Donc $g \circ g$ est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

Figure :


D
B
A
O
C