Vers les similitudes du plan

Ecriture complexe des transformations élémentaires du plan

Déf. Une **transformation** du plan est une fonction du plan dans lui même telle que :
- à tout point M du plan est associé une seule image M'
- tout point du plan admet un et un seul antécédent par cette fonction

Voca. Une fonction ayant ces propriétés est appelée **bijection**.
Donc une transformation du plan $\mathscr{P}$ est une bijection de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

Prop. Ecriture complexe de quelques transformations :
Soit M un point d'affixe z, et M' d'affixe z' son image par une transformation.

- translation $t_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \iff z' = z + b$ (où $b = z_{\vec{u}}$)
- homothétie $h_{\Omega\,,\,k}$: $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M} \iff z' = \omega + k(z - \omega)$
- rotation $r_{\Omega\,,\,\theta}$: $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases} \iff z' = \omega + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$

Ecriture complexe des similitudes du plan

Déf. Une **similitude** du plan est une transformation dont l'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ où $(a;b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Exercice n° 1 Qui est-ce ? (I)

On considère la transformation f du plan d'écriture complexe : $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})z$.
Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice n° 2 Qui est-ce ? (II)

On considère la rotation r du plan d'écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2$.

1. Préciser l'angle de cette rotation.
2. Déterminer l'affixe ω du centre Ω de cette rotation.

Exercice n° 3 Qui est-ce ? (III)

On considère la transformation f du plan d'écriture complexe : $z' = \dfrac{3}{2}(1-\mathrm{i})z + 4 - 2\mathrm{i}$.

1. Montrer que cette transformation admet un unique point fixe Ω d'affixe w à préciser.
2. Montrer que l'écriture complexe de f est de la forme : $z' - \omega = a(z - \omega)$ (où $a \in \mathbb{C}$)
3. En déduire que f est la composée de deux transformations élémentaires à préciser.

Exercice n° 4 Bac Asie 2012

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

1. **a.** Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

   b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.

2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre 0 qui transforme A en B.

   b. Préciser les éléments caractéristiques de la similitude f.

Partie B. Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$, où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On note M' l'image du point M par la transformation g.
   On note z et z' les affixes respectives des points M et M', et $\overline{z}$ celle du conjugué de z.

   a. Démontrer l'égalité : $z' = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\overline{z}$.

   b. On pose C = g(A) et D = g(C). Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.

   c. Quelle est la nature du triangle OAC ?

   d. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ sont colinéaires.

2. Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

Exercice n° 5 Bac Nouvelle Calédonie 2010

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe $z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.
On note A′ et B′ les images respectives des points A et B par f.

1. **a.** Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.

   c. En déduire la nature du triangle OA′B′.

   d. Montrer que l'affixe $z_{\mathrm{A}'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{\mathrm{A}'} = 2z_{\mathrm{A}}$.
   En déduire la construction de A′ et B′.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$. On pose $g = r \circ s$.

   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.

   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.

   c. En déduire la nature de la transformation g.

3. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.