

Ex 3 Soient a et b entiers relatifs* Montrons l'implication $13 \mid 8a + 5b \Rightarrow 13 \mid 5a + 8b$

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 8a + 5b \\ 13 \mid 13a + 13b \end{array} \right\} \Rightarrow 13 \mid \underbrace{(13a + 13b) - (8a + 5b)}_{\text{Combinaison linéaire de } 13a + 13b \text{ et } 8a + 5b}$$

$$\Rightarrow 13 \mid 5a + 8b.$$

* Montrons l'implication $13 \mid 5a + 8b \Rightarrow 13 \mid 8a + 5b$

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 5a + 8b \\ 13 \mid 13a + 13b \end{array} \right\} \Rightarrow 13 \mid (13a + 13b) - (5a + 8b) \\ \Rightarrow 13 \mid 8a + 5b$$

* Conclusion : on a bien établi l'équivalence à démontrer

Ex 5 Soit $m \in \mathbb{Z}$ Supposons que $17 \mid 51m + 4$ Alors $51m + 4 = 17b \quad (b \in \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad 4 &= 17b - 51m \\ &= 17(\underbrace{b - 3m}_{\in \mathbb{Z}}) \end{aligned}$$

donc $17 \mid 4$ ce qui est absurde.donc $51m + 4$ n'est jamais divisible par 17.