T Spé

Corrigé TvG n° 1

Ex 1

1. Variations et signe de g

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = e^x - 1$
$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g		↘	2	↗	

On en déduit que la fonction g est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (son minimum vaut 2).

2. Limites de f

- $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to-\infty}(x) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x) & = & 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par} \\ \Rightarrow \\ \text{quotient}\end{array} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x} = -\infty$

De plus on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$, d'où par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

- $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} & = & 0\ ^{**} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par} \\ \Rightarrow \\ \text{somme}\end{array} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

** : par croissance comparée et inverse

3. Expression de la dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = 1 + (xe^{-x})' = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = 1 + (1-x)e^{-x}.$$

Or

$$e^{-x}g(x) = e^{-x}(e^x + 1 - x) = 1 + (1-x)e^{-x}.$$

Donc, pour tout réel x,

$$\boxed{f'(x) = e^{-x}g(x).}$$

4. Tableau de variation de f

Comme $e^{-x} > 0$ et $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$..

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

5. Tangente T d'équation $y = 2x + 1$

a. $f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1 + (1-0)e^0 = 2$

L'équation de la tangente T_0 est : $\quad y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1$.
C'est bien la droite T.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) - (2x+1) = x + 1 + xe^{-x} - 2x - 1 = x(e^{-x} - 1)$. Or $e^{-x} - 1$ est positif si $x < 0$, nul si $x = 0$, et négatif si $x > 0$. Le produit $x(e^{-x} - 1)$ est donc négatif pour $x \neq 0$ et nul en 0 :

$$\boxed{f(x) - (2x+1) \leq 0, \quad \text{avec égalité seulement pour } x = 0.}$$

c. La courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite T sur $\mathbb{R}$, et elles sont sécantes bien sûr au point de coordonnées $(0, 1)$.

6. Tangente parallèle à $\Delta : y = x$

Une tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ si son coefficient directeur vaut 1, c'est-à-dire si $f'(x) = 1$.

Or on a : $\quad f'(x) = 1 + (1-x)e^{-x}$

Ainsi,

$$f'(x) = 1 \iff (1-x)e^{-x} = 0.$$

Comme $e^{-x} \neq 0$, cette égalité équivaut à $x = 1$. Il existe donc un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 où la tangente est parallèle à Δ.