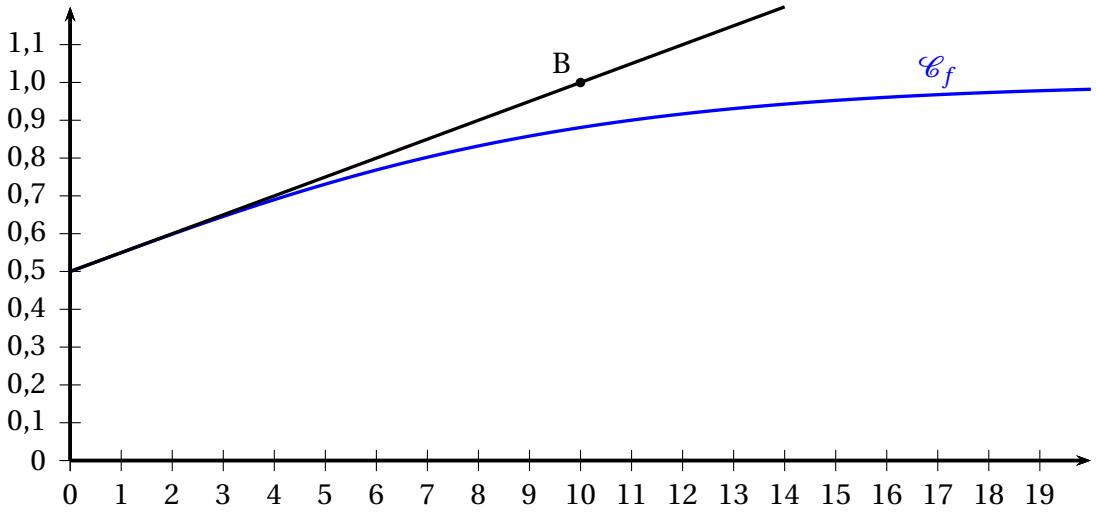
Exercice n° 2

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$.

La courbe de f passe par $A(0\,;\,0.5)$ donc en calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.

On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}.$$

f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1+e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$. On obtient ainsi le résultat voulu en appliquant la formule de dérivation précédente.

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

La droite (AB) est la tangente en $A(0\,;\,0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.

Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$.

Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4\times 0,05 = 0,2$. Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.