Partie A

1. **a.** $(EA) \perp (ABC)$ donc (EA) est la hauteur issue de E dans le tétraèdre ABCE.

   $(CB) \perp (ABE)$ donc (CB) est la hauteur issue de C dans le tétraèdre ABCE.

   b. Les droites (EA) et (BC) sont non coplanaires donc non sécantes.

   Avec deux hauteurs non sécantes, il est impossible d'avoir 4 hauteurs concourantes !

2. **a.** • $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AC}$
   $= \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$
   $= 0 + 0$ car $(FB)\perp(BCD)$ donc $(FB)\perp(BD)$ et $(AC)\perp(BD)$
   $= 0$

   • $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{AH}$
   $= \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH}$
   $= 0 + 0$ car $(FE)\perp(AHD)$ donc $(FE)\perp(AH)$ et $(ED)\perp(AH)$
   $= 0$

   b. (FD) est donc orthogonale aux droites (AC) et (AH), droites sécantes du plan (ACH).
   Donc (FD) est orthogonale au plan (ACH).
   (FD) est bien la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

   c. Par analogie, on en déduit que (AG) est la hauteur issue de A, (CE) est la hauteur issue de H et (HB) est la hauteur issue de H.
   D'après l'énoncé, les 4 hauteurs correspondent aux « grandes diagonales » du cube et sont donc concourantes.

Partie B

1. **a.** (MK) est orthogonale au plan (NPQ) donc d'après le théorème de la porte, (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan ; en particulier, $(MK) \perp (PQ)$.

   b. On a montré que (PQ) est orthogonale à (NK) et (MK) qui sont deux droites sécantes du plan (MNK) donc par définition, (PQ) est orthogonale au plan (MNK).

2. (PQ) est orthogonale au plan (MNK) donc d'après le théorème de la porte, (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan ; en particulier, $(PQ) \perp (MN)$.

Partie C

$\overrightarrow{RS}\,(4\,;\,-1\,;\,-4)$ $\overrightarrow{ST}\,(3\,;\,-5\,;\,7)$ $\overrightarrow{TU}\,(0\,;\,8\,;\,-2)$ $\overrightarrow{RU}\,(7\,;\,2\,;\,1)$ $\overrightarrow{RT}\,(7\,;\,-6\,;\,3)$ $\overrightarrow{SU}\,(3\,;\,3\,;\,5)$

$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RU} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 21 - 10 + 7 \neq 0$ donc (ST) n'est pas orthogonale à (TU).

Avec deux arêtes opposées non orthogonales, ce tétraèdre n'est pas orthocentrique.