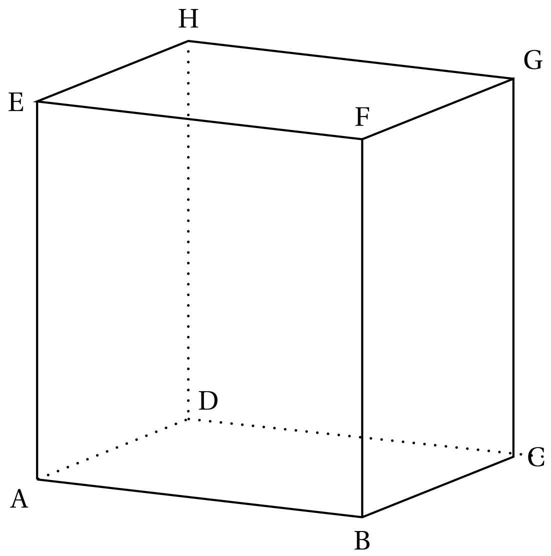
Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.

*On rappelle que dans un tétraèdre* MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonale au plan* (NPQ).

**Partie A Étude de cas particuliers**

On considère un cube ABCDEFGH.




On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

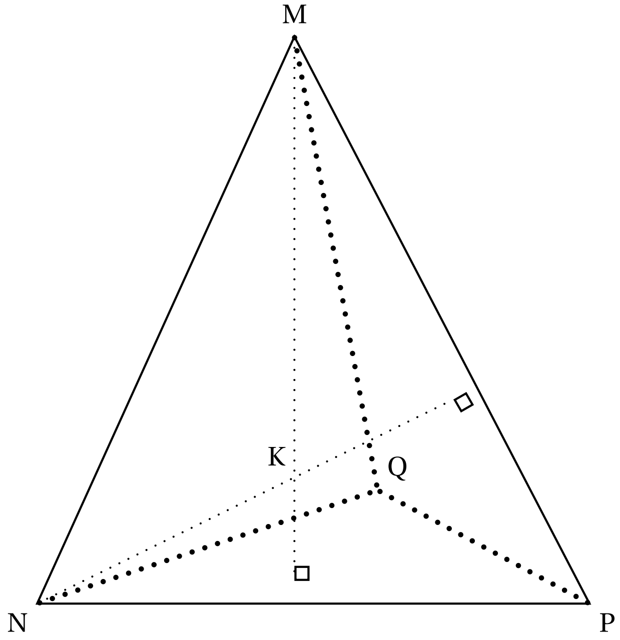
1. On considère le tétraèdre ABCE.
   - **a.** Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre. **1 pt**
   - **b.** Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ? **2 pts**
2. On considère le tétraèdre ACHF.
   - **a.** Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{AH}$ **5 pts**
   - **b.** En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF. **2 pts**
   - **c.** Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H. **1 pt**

     Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ? **1 pt**

*Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.*

**Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques**

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.




1. **a.** Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales. **1,5 pts**

   **b.** Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse. **2 pts**

2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales. **1,5 pts**

   Ainsi, on obtient la propriété suivante :

   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

**Partie C Application**

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{R}(-3\ ;\ 5\ ;\ 2), \mathrm{S}(1\ ;\ 4\ ;\ -2), \mathrm{T}(4\ ;\ -1\ ;\ 5) \quad \text{et } \mathrm{U}(4\ ;\ 7\ ;\ 3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier. **3 pts**