## Exercice 1 — 20 points

### Partie A

Soit $g$ la fonction définie sur $R$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$ — **3 pts**
2. Démontrer que, pour tout réel $x$, $g'(x)$ et $x$ ont des signes opposés. — **2 pts**
3. Donner le tableau de variations de $g$. — **1 pts**
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note $\alpha$ cette solution. — **3 pts**

   **b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$. — **1 pt**

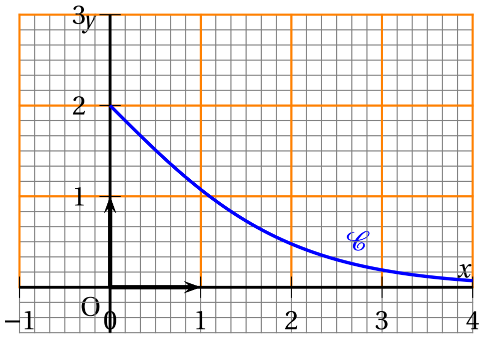
   **c.** Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$. — **2 pts**
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$. — **1 pt**

### Partie B

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La figure est donnée ci-dessous.




Pour tout réel $x$ positif ou nul, on note :
- $M$ le point de $(\mathscr{C})$ de coordonnées $(x\,;\,f(x))$
- $P$ le point de coordonnées $(x\,;\,0)$
- $Q$ le point de coordonnées $(0\,;\,f(x))$

On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle OPMQ.

1. Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de $x$. — **2 pts**
2. Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathscr{A}'(x)$ est du signe de $g(x)$. — **2 pts**
3. En déduire les variations de la fonction $\mathscr{A}$. — **1,5 pts**
4. Démontrer que la valeur maximale de cette aire est égale à $4(\alpha - 1)$, en unité d'aire du repère. — **1,5 pts**

## Exercice 2 — Pour le plaisir...

Pour chacune des deux affirmations , indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

1. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.

   **Affirmation 1 :** La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx+1}$.

   **Affirmation 2 :** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ admet un maximum.