Partie A

1. On a $g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

On a $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (crois. comparée), donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2. La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur $[0\,;\,+\infty[$:
$g'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -x\mathrm{e}^x$.
Comme $\mathrm{e}^x > 0$ on peut en déduire que $g'(x)$ est du signe de $-x$ sur $\mathbb{R}$ donc du signe opposé à x.

3. Donner le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4. **a.** • sur $]-\infty;0]$ l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution car $g(x) \geqslant 1$ sur cet intervalle.

• Sur $[0\,;\,+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante.
L'intervalle image de $[0\,;\,+\infty[$ par g est $]-\infty;2]$,qui contient 0.
Donc, d'après "le théo. de la bijection", l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur cet intervalle.
.
• Bilan : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

b. La calculatrice donne : $1,27 < \alpha < 1,28$.

c. On a $g(\alpha) = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha - \alpha\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha(1-\alpha) = -1 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

5. On peut déduire le signe de $g(x)$ des variations de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. $A(x) = xf(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}$

2. La fonction A est dérivable sur I= $[0;+\infty[$ en tant que quotient, défini sur I, de fonctions dérivables sur I.
$\forall x \geqslant 0,\ A'(x) = \dfrac{4(\mathrm{e}^x+1) - 4x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4(\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1)}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = \dfrac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
Comme $(\mathrm{e}^x+1)^2 > 0$ quel que soit x, le signe de $A'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la précédente question on a donc :
$A'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\alpha[$, $\quad A'(\alpha) = 0$, $\quad$ et $\ A'(x) < 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

3. On a donc : A est croissante sur $[0\,;\,\alpha[$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $A(\alpha)$ étant le maximum de A.

4. $A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{\mathrm{e}^\alpha+1} = \dfrac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1} = \dfrac{4\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = 4(\alpha-1)$