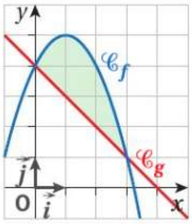
Niveau 1

131 On a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = -x + 4.$$



a. Étudier algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

b. Calculer l'aire du domaine en vert en unités d'aire.

113 On considère :

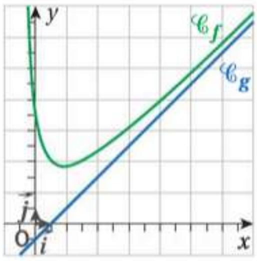
$$I = \int_0^{\ln(5)} \frac{e^x + 4}{e^x + 6}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln(5)} \frac{2}{e^x + 6}\,dx.$$

a. Calculer $I + J$ et $I - 2J$.

b. En déduire les valeurs de I et J.

135 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+1}$ et $g(x) = x - 1$.

On a tracé les courbes représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1. Conjecturer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. a. Montrer que, $\forall x > -1$:

$$f(x) - g(x) = \frac{8}{x+1}.$$

b. Valider ou infirmer la conjecture du **1** et calculer la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Pour $\lambda \in [0\,;+\infty[$, on note $I_\lambda = \displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{8}{x+1}\,dx$.

a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_λ.

b. Calculer I_λ.

c. Déterminer la limite de I_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Niveau 2

49 Observons avant de calculer !

Marie affirme qu'elle peut calculer en moins de 3 minutes les intégrales suivantes.

> **Info**
> Pour I_1, on note $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}$.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \qquad I_2 = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - e^{2x}\right)dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - 4e^{2x}\right)dx \qquad I_4 = \int_0^1 e^{2x}\,dx$$

$$I_5 = \int_0^1 7e^{2x}\,dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{4}{x+1}\,dx$$

- Quelle stratégie utilise Marie ?

48 En moins de 30 secondes et sans calculs !

On considère la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt.$$

a. Déterminer $\varphi(0)$.

b. Justifier que φ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

c. Déterminer $\varphi'(x)$ pour tout nombre réel x de $[0\,;+\infty[$.

d. Étudier le sens de variation de φ.

91 IN ENGLISH ▶ p. 540

A function f is given by $x \mapsto \dfrac{x^2 - x + 2}{(x-1)^2}$, $x \in]1\,;+\infty[$.

a. Find the real numbers a, b and c such that:

$$\forall x \in]1\,;+\infty[,\ f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

b. Find $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$.

Niveau 3

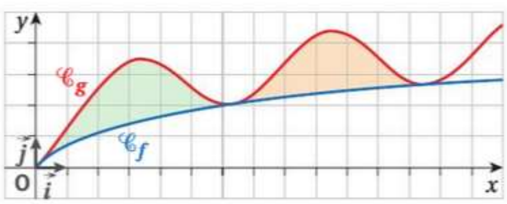
151 Des aires égales ?

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans le plan muni d'un repère, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

- Comparer les aires des deux surfaces colorées.



153 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

- Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

> **Aide** Calculer $u_n + u_{n+1}$, puis encadrer u_n.

154 Formule des trois niveaux

f désigne une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3, a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

- Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$.

> **Aide** Écrire $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ où p, q, r et s sont des nombres réels.