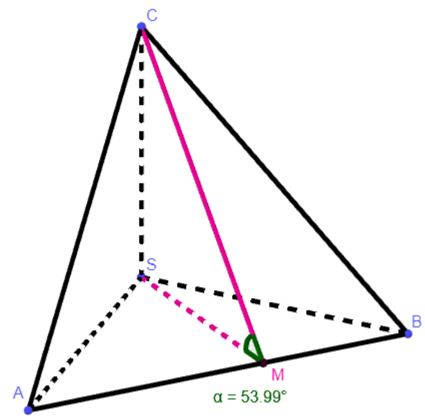
L'espace est muni d'un repère orthonormé.
SABC est un tétraèdre avec S(0; 0; 0), A(2; 0; 0), B(0;2;0) et C(0;0;2).



M est un point du segment $[AB]$.

Objectif :

Déterminer la position du point M pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{SMC}}$ est maximale.

1. Justifier qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\text{AM}} = t\,\overrightarrow{\text{AB}}$. A quel intervalle appartient ce nombre réel t ? **2 pts**

$\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont colinéaires donc il existe un réel t tel que $\overrightarrow{\text{AM}} = t\,\overrightarrow{\text{AB}}$.
De plus $\text{M} \in [\text{AB}]$ donc $t \in [0;1]$

2. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de t. **2 pts**

Soit $\text{M}(x; y; z)$ $\quad \overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{AM}} = t\,\overrightarrow{\text{AB}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-2 & = & -2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2-2t \\ y & = & 2t \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

3. Exprimer en fonction de t le produit scalaire $\overrightarrow{\text{MS}} \cdot \overrightarrow{\text{MC}}$. **2 pts**

$\overrightarrow{\text{SM}}\begin{pmatrix} 2-2t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{CM}}\begin{pmatrix} 2-2t \\ 2t \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\text{MS}} \cdot \overrightarrow{\text{MC}} = \overrightarrow{\text{SM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = (2-2t)^2 + (2t)^2 + 0 \times (-2) = 8t^2 - 8t + 4$

4. Exprimer en fonction de t les longueurs MS et MC. **2 pts**

$\text{MS}^2 = (2-2t)^2 + (2t)^2 + 0^2 = 8t^2 - 8t + 4$ donc $\text{MS} = \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$
$\text{MC}^2 = (2-2t)^2 + (2t)^2 + (-2)^2 = 8t^2 - 8t + 8$ donc $\text{MS} = \sqrt{8t^2 - 8t + 8}$

5. En déduire que $\cos\left(\widehat{\text{SMC}}\right) = \sqrt{\dfrac{2t^2-2t+1}{2t^2-2t+2}}$. **2 pts**

$$\cos\left(\widehat{\text{SMC}}\right) = \frac{\overrightarrow{\text{MS}}\cdot\overrightarrow{\text{MC}}}{\text{MS}\times\text{MC}} = \frac{8t^2-8t+4}{\sqrt{8t^2-8t+4}\,\sqrt{8t^2-8t+8}} = \frac{\sqrt{8t^2-8t+4}}{\sqrt{8t^2-8t+8}} = \sqrt{\frac{8t^2-8t+4}{8t^2-8t+8}} = \sqrt{\frac{2t^2-2t+1}{2t^2-2t+2}}$$

6. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = \dfrac{2t^2-2t+1}{2t^2-2t+2}$ **2,5 pts**

f est dérivable sur I$=[0;1]$ en tant que fonction rationnelle définie sur I.
$\forall x \in \text{I}$, $f'(x) = \ldots = \dfrac{4t-2}{(2t^2-2t+2)^2}$
Donc $f'(t)$ est du signe de $4t-2$ sur I.
Ainsi f est décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

7. Justifier que si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, alors les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur I. **1,5 pts**

Soient a et b deux réels de I.
Si $u(a) \leqslant u(b)$ alors $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$.
Ainsi, les fonctions u et $\sqrt{u}$ ont le même sens de variation sur I.

8. En déduire la position du point M pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{\text{SMC}}$ est maximale. **1,5 pts**

On a montré que : $\cos\left(\widehat{\text{SMC}}\right) = \sqrt{\dfrac{2t^2-2t+1}{2t^2-2t+2}} = \sqrt{f(t)}$

Comme f et $\sqrt{f}$ ont le même sens de variation sur I, on en déduit que $\cos\left(\widehat{\text{SMC}}\right)$ est minimum pour $t = \dfrac{1}{2}$.

9. Donner la mesure maximale de $\widehat{\text{SMC}}$ en degrés, arrondie au dixième par défaut. **1,5 pts**

Comme la fonction cos est décroissante sur $[0;\pi]$, on en déduit que l'angle $\widehat{\text{SMC}}$ est maximum quand son cosinus est minimum, donc pour $t = \dfrac{1}{2}$.

On a alors $\cos\left(\widehat{\text{SMC}}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

D'où $\widehat{\text{SMC}} \approx 54,7$ degrés.