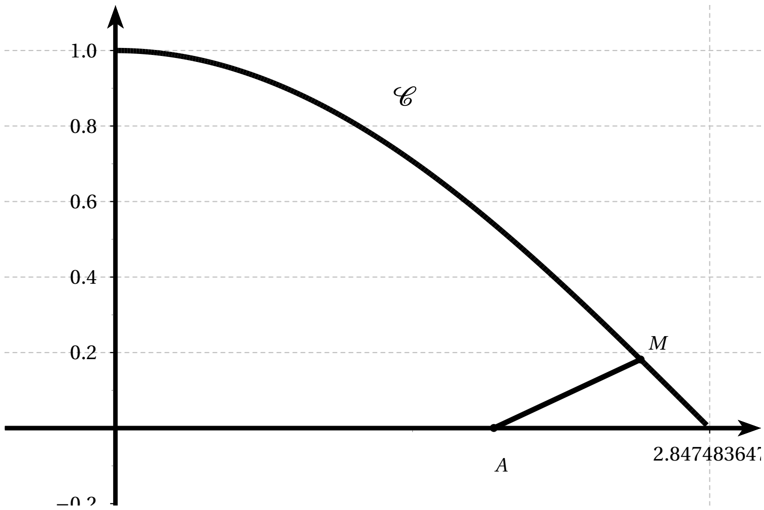
DISTANCE MINIMALE

Soient f la fonction définie sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos x$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On note A le point de coordonnées $(1;0$ et, pour $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x.
L'objectif du problème est de déterminer la valeur de x pour laquelle la distance AM est minimale.



1. Il semble que le minimum soit obtenu pour $x_M \approx 1,2765$. (figure geogebra)

2. $d(x) = AM^2 = (x-1)^2 + (\cos x - 0)^2 = x^2 - 2x + 1 + \cos^2(x)$.

   a. $d'(x) = 2x - 2 + 2(-\sin x)(\cos x)$

   Or on a : $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
   D'où : $d'(x) = 2x - 2 - \sin(2x)$

   b. $d''(x) = 2 - 2\cos(2x) = 2(1 - \cos(2x))$

   Or, pour tout réel x, $\cos(2x) \leqslant 1$, donc $1 - \cos(2x) \geqslant 0$.

   Ainsi $d''(x) > 0$ (sauf en la valeur isolée $\dfrac{\pi}{2}$ où elle s'annule).

   Remarque :
   le fait que la dérivée s'annule "ponctuellement", en des valeurs isolées, n'empêche pas la fonction d'être strictement monotone si la dérivée est de signe constant.

Si f' est positive sur I, sauf en des valeurs isolées de I où elle s'annule, alors f est strictement croissante s

Donc d' est strictement croissante sur $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

De plus elle est continue sur cet intervalle D.

On a : $d'(0) = -2$ et $d'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 > 0$.

Donc l'intervalle image de D par la fonction d' contient zéro.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, on en déduit que l'équation $d'(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
On obtient à la calculatrice, par dichotomie ou balayage : $1,27 < \alpha < 1,28$.

c. Tableau de variations de f :

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$d'(x)$		$-$	0	$+$	
$d(x)$		$\searrow$	$d(\alpha)$	$\nearrow$	

Donc c'est pour $x = \alpha$ que la distance AM est minimale.