Corrigé ex 7 - fiche révision espace

1. Par définition de G centre de gravité du triangle BCD, on a :

   $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \iff 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0} \iff \overrightarrow{AG}=\boxed{\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)}$.

   Calculons $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{3}\left(-AC^2+AD^2\right)=0$, car AC = AD.
   Un calcul analogue montre que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
   Conclusion : la droite (AG) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD), donc est orthogonale à ce plan.

2. La droite (AB) est perpendiculaire à (AC) et à (AD), dont est perpendiculaire au plan (ACD). Le volume du tétraèdre est donc égal à
   $V=AB\times S(ACD)=a\times\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{2}$.

   D'après la question précédente on peut également utiliser la hauteur AG et la base (BCD) :

   $V=AG\times S(BCD)=AG\times\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}\times a\sqrt{2}=AG\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

   On a donc $a\times\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{2}=AG\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \iff \boxed{AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}$.