Corrigé ex 3 - fiche révision espace

1. (a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

   (b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$

   - AC et BD sont les deux diagonales du carré ABCD donc les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; on en déduit que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.
   - La droite (AE) est orthogonale au plan (ABD) donc orthogonale à toute droite de ce plan. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux ; on en déduit que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=0$;

   Donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}==0$. On en déduit que $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BD}$.

   (c) On admet que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{BE}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (BDE) ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (BDE).
   On en déduit que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

   (a) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.

   D'après la question **1. c.**, la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).
   Une équation du plan (BDE) est donc : $1(x-x_B)+1(y-y_B)+1(z-z_B)=0 \iff x-1+y+z=0 \iff \boxed{\mathrm{x+y+z=1}}$

   (b)
   - On détermine une représentation paramétrique de la droite (AG).
     Cette droite passe par le point A de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$ et a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AG}$ de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,1)$.
     La droite (AG) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&t\\ y&=&t\\ z&=&t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$
   - Le point K d'intersection de (AG) et (BDE) a ses coordonnées qui sont solutions du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x&=&t\\ y&=&t\\ z&=&t\\ x+y+z-1&=&0\end{array}\right.$

     On déduit de ce système que $t+t+t-1=0$ donc que $t=\dfrac{1}{3}$.
     Le point K a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

   (c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\mathcal{A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Le volume de la pyramide BDEG est donné par la formule $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\times h\times\mathcal{A}$ où h est la hauteur de la pyramide issue de G. d'après les questions précédentes, cette hauteur h est la longueur GK.
   $GK=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2}=\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}}=\sqrt{\dfrac{12}{9}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
   Donc $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$.