Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés.

EXERCICE 1

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan $\mathscr{P}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
2. f' désigne la dérivée de f.

   Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ s'écrit sous la forme : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

   Déterminer l'expression de $h(x)$. Détailler le calcul.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Soient B, C et D les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives 0, 5 et 10.

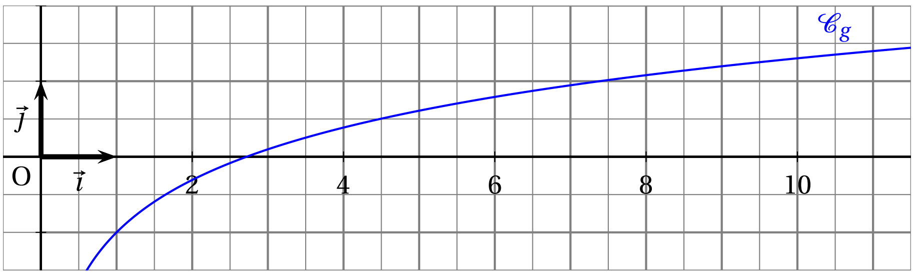
   On note y_{B}, y_{C} et y_{D} leurs ordonnées.

   Donner la valeur de y_{B} et une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de y_{C} et y_{D}.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = -1 + \ln x$.

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de g dans le plan $\mathscr{P}$.



1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) - g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right) + \dfrac{b}{x+1}$, où a et b sont des réels à déterminer.
2. **a.** Pour $x > 0$, quel est le signe de $f(x) - g(x)$? Justifier la réponse.

   b. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Soit $x > 0$. On considère les points $M(x\,;\,f(x))$ et $N(x\,;\,g(x))$.

   a. Exprimer la longueur MN en fonction de x.

   b. Donner la limite de MN lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Sur la figure est tracée la courbe $\mathscr{C}_g$. Placer les points B, C et D.

   Tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

   Puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en utilisant les résultats des questions B. 2. b. et B. 3. b.

Partie C

On considère la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $H(x) = (x+2)\ln(x+1) - x\ln x.(0)$

1. Montrer que H est une primitive de $f - g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$. On note $\mathscr{A}$ son aire, exprimée en unités d'aires.
   a. Hachurer $\mathscr{D}$ sur la figure de la question B. 4.
   b. Calculer $\mathscr{A}$.
   Le résultat sera écrit sous la forme $\mathscr{A} = \alpha \ln 2 + \beta \ln 3$ où α et β sont des entiers relatifs à déterminer.

EXERCICE 2

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu.
Dans cet exercice, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie A

1. Donner l'ensemble F_1 des solutions de l'équation (E_1) d'inconnue réelle x :

$$(E_1) \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

2. En déduire l'ensemble F_2 des solutions de l'équation (E_2) d'inconnue réelle λ :

$$(E_2) \quad 4\mathrm{e}^{-2\lambda} - 4\mathrm{e}^{-\lambda} + 1 = 0.$$

   Justifier la réponse.

Partie B

À une sortie d'autoroute, il y a une seule barrière de péage et une étude a montré que le temps d'attente d'un véhicule arrivant à la barrière avant le franchissement du péage, exprimé en minutes, peut être représenté par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'étude a montré par ailleurs que la probabilité que le temps d'attente d'un véhicule soit compris entre une et deux minutes est égale à $\frac{1}{4}$.

1. On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, la probabilité $P(T \leqslant t)$ que l'attente d'un véhicule dure moins de t minutes est donnée par : $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   a. Ecrire $P(1 \leqslant T \leqslant 2)$ en fonction de λ.
   b. En utilisant la question A. 2., montrer que $\lambda = \ln 2$.

On a donc : pour tout $t \geqslant 0$, $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-(\ln 2)t}$.
   [resume]Un véhicule arrive au péage.

1. a. Déterminer la probabilité P_1 qu'il attende au plus une minute. Détailler le calcul.
   b. Déterminer la probabilité P_2 qu'il attende au moins deux minutes. Détailler le calcul.
   c. Déterminer la probabilité P_3 qu'il attende au moins trois minutes, sachant qu'il a attendu au moins deux minutes. Justifier soigneusement la réponse.

Partie C

Le trafic augmentant, la société d'autoroute a installé une deuxième barrière de péage.
Le passage d'un véhicule au péage sera dit « rapide » lorsque son temps d'attente est inférieur ou égal à une minute et « lent » dans le cas contraire.
La probabilité que le véhicule choisisse la première barrière est égale à $\frac{2}{3}$ et, dans ce cas, la probabilité que son passage soit rapide est égale à $\frac{1}{2}$.

Lorsque le véhicule choisit la deuxième barrière, plus moderne, la probabilité que son passage soit rapide est égale à $\frac{3}{5}$.

Un véhicule arrive au péage. On considère les évènements :

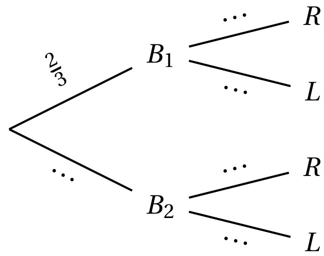
B_1 : « le véhicule choisit la première barrière »

R : « le passage au péage est rapide »

B_2 : « le véhicule choisit la deuxième barrière »

L : « le passage au péage est lent »

1. Compléter l'arbre ci-contre avec les probabilités correspondantes.



2. Déterminer la probabilité P_4 que le passage du véhicule au péage soit rapide. Détailler le calcul.

3. Déterminer la probabilité P_5 que le véhicule ait choisi la deuxième barrière, sachant que son passage a été lent. Justifier soigneusement le résultat.

EXERCICE 3

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu.

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

1. On considère la suite géométrique $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1$.

- **a.** Donner les valeurs exactes de v_2 et v_3.
- **b.** Donner, pour tout $n \geqslant 1$, l'expression de v_n en fonction de n.

2. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \ldots + v_n$.

- **a.** Donner les valeurs exactes de A_1, A_2 et A_3.
- **b.** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $A_n = 4\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.
- **c.** La suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} A_n$. Justifier la réponse.
- **d.** Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 3$. On le notera n_0.
  Justifier soigneusement la réponse.

Partie B

On effectue le coloriage d'un carré de côté 2 unités de longueur avec les consignes suivantes :

Étape 1 : partager le carré initial en quatre carrés identiques de côté de longueur c_1 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

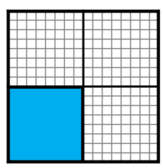
Étape 2 : pour chacun des carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_2 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

On poursuit le coloriage du carré selon le même procédé à chaque étape. Autrement dit, pour tout $n \geqslant 1$:

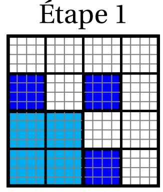
Étape n : pour chacun des k_n carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_n et colorier le carré situé en bas à gauche.

On colorie k_n carrés à l'étape n.

On remarque que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.



Étape 1



Étape 2

1. Faire le coloriage de l ?étape 3.
2. a. Donner la valeur de k_3.
   b. Donner, pour tout $n \geqslant 1$, l'expression de k_{n+1} en fonction de k_n.
   c. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, l'expression de k_n en fonction de n.
3. a. Donner les valeurs de c_1, c_2 et c_3.
   b. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
4. Justifier que l'aire, en unités d'aire (u. a.), de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale au terme v_n de la suite définie dans la question A. 1.
5. a. Que vaut l'aire, en u.a., de la surface totale coloriée à l'issue de l'étape n ?
   b. Déterminer le nombre d'étapes minimal nécessaire pour colorier au moins les trois quarts du carré initial. Justifier la réponse.

EXERCICE 4

Donner les réponses à cet exercice dans le cadre prévu.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $\text{A}\left(0 ; 4 ; -1\right)$, $\text{B}\left(-2 ; 4 ; -5\right)$, $\text{C}\left(1 ; 1 ; -5\right)$, $\text{D}\left(1 ; 0 ; -4\right)$, $\text{E}\left(-1 ; 2 ; -3\right)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -3+k \\ y &=& \phantom{-3+{}}k \\ z &=& -5+k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R} ;$$
- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x+2z+7=0$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$.
   b. Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.
   c. Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.
2. Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x-y+d=0$, où d désigne un réel.
   a. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathcal{P}_2$.
   b. Soit J le point de coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{5}{2} ; -5\right)$.
   Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.
3. a. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{CD}}$.
   b. Calculer les coordonnées du milieu K du segment [CD].
   c. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonal à la droite (CD).
   Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.
4. Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.
   a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.
   b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.
5. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{EA}}$, $\overrightarrow{\text{EB}}$, $\overrightarrow{\text{EC}}$ et $\overrightarrow{\text{ED}}$.
6. Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.
7. En déduire que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.
8. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.