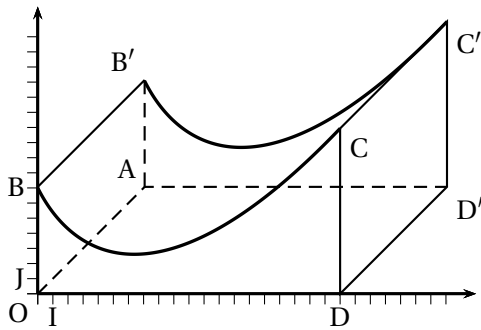




Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère ortho-normé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

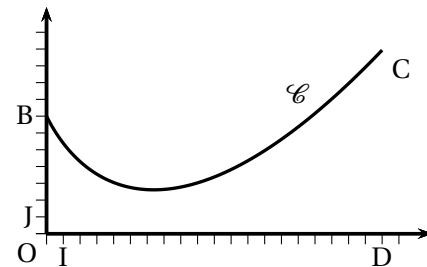
Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.