Corrigé ex de bac - Métropole 2015 - Module de skatepark

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

Partie 1

1. $f = u\ln(u) + v$ avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = -2x+7$.
   f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $f' = u'\ln(u) + u \times \dfrac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -3$
   d'où $f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1)\dfrac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 \ = \boxed{f'(x) = \ln(x+1) - 2}$.
2. $f'(x) > 0 \iff \ln(x+1) > 2 \iff x+1 > \mathrm{e}^2$ (croissance de la fonction exp)
   d'où $\quad f'(x) > 0 \iff x > \mathrm{e}^2 - 1$.

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		e^2-1		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	$\searrow$	$f\left(\mathrm{e}^2-1\right) \approx 2,6$	$\nearrow$	$f(20) \approx 10,93$

3. $f'(0) = 1\ln(1) - 2 = \boxed{-2}$.

4. g est donc une primitive de $x \mapsto (x+1)\ln(x+1)$.
Une primitive de $x \mapsto 3x - 7$ est $x \mapsto \dfrac{3x^2}{2} + 7x$.
Une primitive de f est donc définie par :
$F(x) = g(x) - \dfrac{3x^2}{2} + 7x = \dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3x^2}{2} + 7x \ = \boxed{\dfrac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{13}{2}x}$.

Partie 2

1. P_1 : La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f\left(\mathrm{e}^2-1\right) \approx 10,93 - 2,6 \approx 8,3 > 8$ donc P_1 est **vraie** ;
   P_2 : L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2 \approx 1,04$, donc P_2 est **vraie**.
2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut
   $\mathscr{A}_1 = \displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = F(20) - F(0)$.
   $F(20) = \dfrac{21^2\ln 21}{2} - 700 + 130 = \dfrac{441\ln 21}{2} - 570$.
   $F(0) = 0$.
   On en déduit $\boxed{\mathscr{A}_1 = \dfrac{441\ln 21}{2} - 570 \approx 101,3}$.
   L'aire latérale gauche vaut $\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(OAB'B) = \boxed{10f(0) = 70}$.
   L'aire latérale droite vaut $\mathscr{A}_3 = \mathscr{A}(DD'C'C) = \boxed{10f(20) \approx 109,3}$.
   L'aire à peindre en rouge est donc $\mathscr{A} = 2\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 \approx \boxed{382,0\ \mathrm{m}^2}$.
   Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\dfrac{382,0}{5} \approx \boxed{76,4}$
   77 litres de peinture sont donc nécessaires.