

Partie A

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, il existe un unique réel strictement positif χ_α tel que $P(-\chi_\alpha \leq X \leq \chi_\alpha) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $H(x) = P(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt$

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x , $H(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$.
4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $]0; +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $]0; +\infty[$.
5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?
2. Montrer que $p(B \cap D) = 0,0224$.
3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL. Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en millilitres).

On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ?
Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.
2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n , où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

- a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?
- b. Vérifier que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
- c. Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.