Corrigé

Exercice 1

1. $P(\mathrm{i}\sqrt{2}) = (\mathrm{i}\sqrt{2})^3 - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})(\mathrm{i}\sqrt{2})^2 + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})(\mathrm{i}\sqrt{2}) - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
$= -2\mathrm{i}\sqrt{2} - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})(-2) + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
$= -2\mathrm{i}\sqrt{2} + 4 + 2\mathrm{i}\sqrt{2}) + 2\mathrm{i}\sqrt{2} - 4 - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$
$= 0$
2. $\forall z \in \mathbb{C},\quad (z-\mathrm{i}\sqrt{2})(az^2+bz+c) = az^3 + (b-a\mathrm{i}\sqrt{2})z^2 + (c-b\mathrm{i}\sqrt{2})z - c\mathrm{i}\sqrt{2}$
D'où par identification des coefficients avec ceux de $P(z)$:
$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2-\mathrm{i}\sqrt{2} \\ c-b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2} \\ -c\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} a = & 1 \\ b = & -2 \\ c = & 2 \end{array}\right.$$
3. $P(z)=0 \iff (z-\mathrm{i}\sqrt{2})(z^2-2z+2)=0 \iff z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z^2-2z+2=0$

Racines de z^2-2z+2 : $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$ $(\Delta=-4)$

Bilan : $\mathscr{S} = \{1+\mathrm{i}\ ;\ 1-\mathrm{i}\ ;\ \mathrm{i}\sqrt{2}\}$

Exercice 2

1. $z^4+z^2-20=0$ (E1)
En posant $Z=z^2$ (E1) s'écrit $Z^2+Z-20=0$
Ce trinôme admet deux racines : $Z_1=4$ et $Z_2=-5$ $(\Delta=81)$
On cherche donc z tel que $z^2=4$ ou $z^2=-5$
Bilan : $\mathscr{S} = \{2;-2;\mathrm{i}\sqrt{5};-\mathrm{i}\sqrt{5}\}$
2. $\forall z \neq -1,\quad \dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{i} \iff (z-1)=\mathrm{i}(z+1) \iff z-\mathrm{i}z = 1+\mathrm{i} \iff z(1-\mathrm{i}) = 1+\mathrm{i}$
$\iff z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$
3. $z^2+z\overline{z}=4$ (E3)
Posons $z=x+\mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.
(E3) $\iff (x+\mathrm{i}y)^2+x^2+y^2=4 \iff x^2+2xy\mathrm{i}-y^2+x^2+y^2=4 \iff 2x^2+2xy\mathrm{i}=4$
donc :
(E3) $\iff 2x^2=4$ et $2xy=0 \iff x^2=2$ et $xy=0$
$\iff x=\sqrt{2}$ et $y=0$ ou $x=-\sqrt{2}$ et $y=0$
Bilan : $\mathscr{S} = \{\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$