Forme algébrique des nombres complexes

Ex 1. Factorisation d'un polynome par la méthode d'identification des coefficients

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})z^2 + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$

1. Montrer que $P(\mathrm{i}\sqrt{2}) = 0$
2. Déterminer trois réels a, b, et c tels que : $P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})(az^2 + bz + c)$
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

Ex 2. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$ et donner les solutions sous forme algébrique :

1. $z^4 + z^2 - 20 = 0$
2. $\dfrac{z-1}{z+1} = \mathrm{i}$
3. $z^2 + z\overline{z} = 4$

Ex 3. Petite étude dans le plan complexe.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$

On note A le point d'affixe i.

A tout point M du plan, distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}}$$

Le point M' est appelé l'image de M.

1. **a.** Calculer l'affixe $z_{B'}$ du point B$'$ image du point B d'affixe $z_B = 1$.
   b. Déterminer l'affixe du point C tel que l'image de C ait pour affixe 2.
   c. Démontrer que si z est un imaginaire pur, alors z' l'est aussi.
   d. Déterminer les points M du plan tels que l'on ait M = M'
2. Etant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.
   a. Montrer l'égalité : $z' = \dfrac{-x}{x^2 + (y-1)^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2}$
   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que z' soit réel.

Ex 4. Affixe d'un milieu, d'un vecteur

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 5\mathrm{i},\ z_B = 1 - 2\mathrm{i} \text{ et } z_C = 5 - \mathrm{i}$$

1. Calculer les affixes du milieu I de $[BC]$ et du point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$
2. Les points I, J et A sont-ils alignés ?