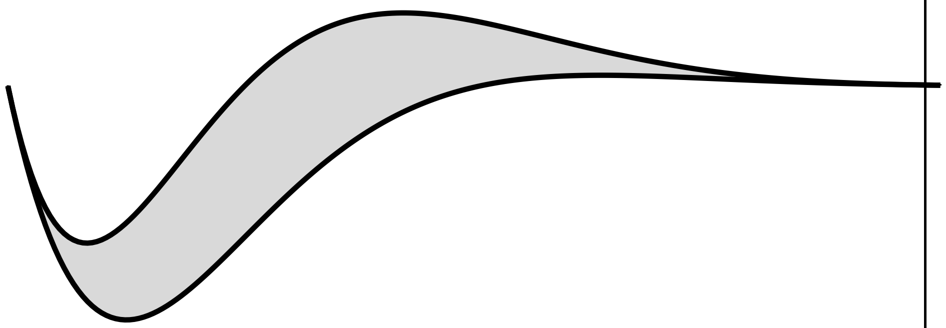
EXERCICE 1 - Antilles 2018 ▲ 40 minutes ▼

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   (a) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$.
   (b) En déduire les variations de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Partie B - Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. L'unité graphique est de 2 centimètres.

1. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad H(x) = \left(-\dfrac{\cos x}{2} - \dfrac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$ On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ est les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.
   (a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   (b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm².

EXERCICE 2 - Antilles 2018 ▲ 40 minutes ▼

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :
– entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
– entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

   Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
5. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad v_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que …
  $n \leftarrow \ldots$
  $u \leftarrow \ldots$
Fin de Tant que

La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

EXERCICE 3 - Liban 2018 ▲ 10 minutes ▼

Les quinze jours précédant la rentrée universitaire, le standard téléphonique d'une mutuelle étudiante enregistre un nombre record d'appels.

Les appelants sont d'abord mis en attente et entendent une musique d'ambiance et un message préenregistré.

Lors de cette première phase, le temps d'attente, exprimé en secondes, est modélisé par la variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02\ \text{s}^{-1}$.

Les appelants sont ensuite mis en relation avec un chargé de clientèle qui répond à leurs questions.

Le temps d'échange, exprimé en secondes, lors de cette deuxième phase est modélisé par la variable aléatoire Y, exprimée en secondes, qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 96$ s et d'écart-type $\sigma = 26$ s.

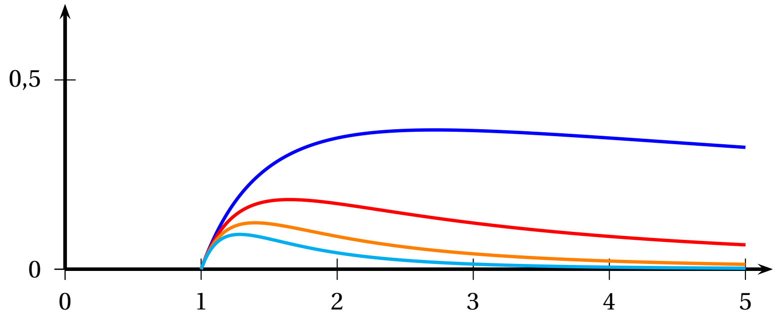
1. Quelle est la durée totale moyenne d'un appel au standard téléphonique (temps d'attente et temps d'échange avec le chargé de clientèle) ?
2. Un étudiant est choisi au hasard parmi les appelants du standard téléphonique.
   (a) Calculer la probabilité que l'étudiant soit mis en attente plus de 2 minutes.
   (b) Calculer la probabilité pour que le temps d'échange avec le conseiller soit inférieur à 90 secondes.
3. Une étudiante, choisie au hasard parmi les appelants, attend depuis plus d'une minute d'être mise en relation avec le service clientèle. Lasse, elle raccroche et recompose le numéro. Elle espère attendre moins de trente secondes cette fois-ci.

   Le fait de raccrocher puis de rappeler augmente-t-il ses chances de limiter à 30 secondes l'attente supplémentaire ou bien aurait-elle mieux fait de rester en ligne ?

EXERCICE 4 - Liban 2018 ▲ 30 minutes ▼

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur $[1 ; 5]$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$. Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathscr{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$:
$$f_n'(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}.$$
2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
   On note A_n le point de la courbe $\mathscr{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
   Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation
$$y = \frac{1}{\text{e}}\ln(x).$$
3. (a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$:
$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:
$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\text{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right).$$
   (c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface sous la courbe f_n, c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe $\mathscr{C}_n$.
   Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.