EXERCICE 1 - Pondichéry 2018 ▲ 40 min ▼

Dans l'espace muni du repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), (4 ; −1 ; 0), (0 ; 3 ; 2) et (4 ; 3 ; −2).

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
2. Soit M un point de la droite (CD).
   (a) Déterminer les coordo. du point M tel que la distance BM soit minimale.
   (b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées (3 ; 3 ; −1). Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
   (c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
   (d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE 2 - Antilles 2017 ▲ 40 minutes ▼

L'espace est muni d'un repère orthonormé .
On considère les points A(−1 ; 2 ; 0), B(1 ; 2 ; 4) et C(−1 ; 1 ; 1).

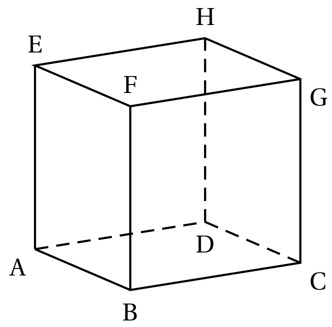
1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   (c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
   (a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.
   (b) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.
   (c) Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t-3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

   Démontrer que $\mathscr{D}$ est l'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICE 3 - Am Sud nov 2017 ▲ 30 minutes ▼

On considère un cube ABCDEFGH.

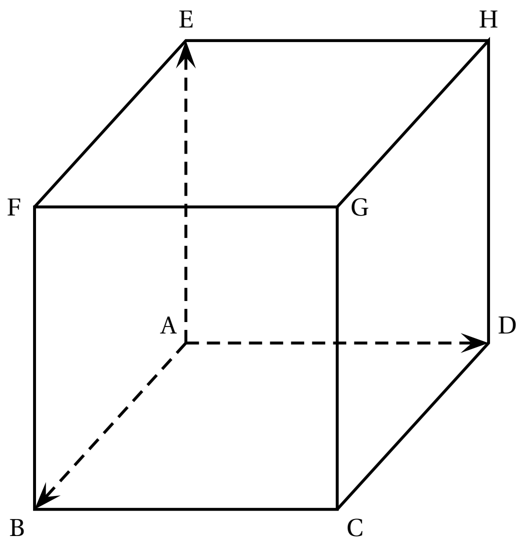


1. (a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = 0$.
   (c) On admet que $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).
2. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
   (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).
   (c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Calculer le volume de la pyramide BDEG.

EXERCICE 4 - Pondichéry 2017 ▲ 20 minutes ▼

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.
On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.



EXERCICE 5 - Centres étrangers 2016 (extraits) ▲ 10 minutes ▼

VRAI OU FAUX : justifier !

L'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites D_1 et D_2 qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-3t \\ z = \quad 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = -5t'+3 \\ y = \quad 2t' \\ z = \quad t'+4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1. **Affirmation 1**
   Les droites D_1 et D_2 sont sécantes.
2. **Affirmation 2**
   La droite D_1 est parallèle au plan d'équation $x+2y+z-3=0$.

EXERCICE 6 - Asie 2015 (extraits) ▲ 10 minutes ▼

VRAI OU FAUX : justifier !

Dans les questions 1 et 2, on munit l'espace d'un repère orthonormé, et on considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives$x+y+z-5=0$ et $7x-2y+z-2=0$.

1. **Affirmation 1 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.
2. **Affirmation 2 :** les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ se coupent suivant la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t+1 \\ z &= -3t+4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE 7 - Centres étrangers 2005 (extraits) ▲ 20 minutes ▼

Soit ABCD un tétraèdre tel que ABC, ABD et ACD soient trois triangles isocèles rectangles en A avec AB = AC = AD = a.
On appelle G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BCD).
   $\left(\text{On pourra par exemple calculer } \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}.\right)$
2. En exprimant de deux façons différentes le volume du tétraèdre ABCD, calculer la longueur du segment [AG].

Exercice 8 - Antilles sept 2011 (extraits) ▲ 10 minutes ▼

L'espace est muni d'un repère orthonormé .

On considère la sphère S de centre $\Omega(3\,;\,1\,;\,3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,1)$.

Doit la droite D de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+t \\ y & = & -3+2t \\ z & = & t, \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$

1. Montrer que le point I appartient à la droite D.
2. Montrer que le point I appartient à la sphère S.
3. Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

Exercice 9 - Nlle Cal mars 2011 (extraits) ▲ 10 minutes ▼

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct .

On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
2. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 10 - Am Nord mai 2008 (extraits) ▲ 10 minutes ▼

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$.

Exercice 11 - Am Nord juin 2010 (extraits) ▲ 15 minutes ▼

L'espace est rapporté à un repère orthonormal .

Les points B et C ont pour coordonnées respectives : $B(-2\,;\,-6\,;\,5)$ $C(-4\,;\,0\,;\,-3)$

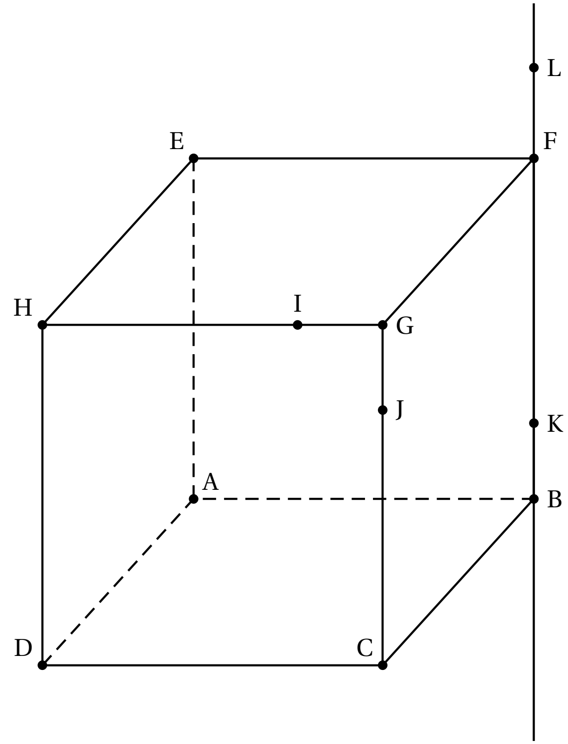
On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).

Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$.

1. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$.
2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Exercice 12 - Nvlle Calédonie nov 2016 ▲ 20 minutes ▼

1. Tracer ci-dessous, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).



2. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.