Chap. n°

LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

I Lois à densité

1. Notion de variable aléatoire continue

- On appelle **variable aléatoire discrète** toute variable aléatoire prenant des valeurs « isolées ».
  Exemples : X = nombre de pièces défectueuses dans un lot Y = nombre de bonnes réponses à un QCM

- On appelle **variable aléatoire continue** toute variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou toutes les valeurs de $\mathbb{R}$)
  Exemples : X = temps d'attente à un guichet Y = durée de vie d'un composant électronique

- Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X va consister alors à donner la probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle donné.
  On écrira par exemple $P(1 \leq X \leq 2)$ pour la probabilité qu'un temps d'attente X soit compris entre 1h et 2h

2. Notion de densité de probabilité

a. Définition

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle $I = [a\,;\,b]$ (avec a et b réels)
On appelle densité de probabilité toute fonction positive f telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f lorsque, pour tout intervalle $[c\,;\,d]$ inclus dans I, on a :

$$\boxed{P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx}$$

b. Remarques

- Pour tout réel k, on a $P(X = k) = 0$ car $P(X = k) = \int_k^k f(x)\,dx = 0$

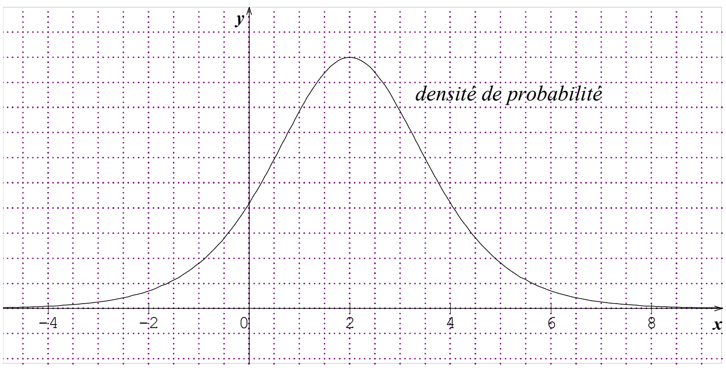
  Autrement dit, pour toute variable aléatoire continue, la probabilité que X prenne une valeur donnée est nulle.

  Illustration : si D est une variable aléatoire continue égale à la durée de vie d'une ampoule par exemple on aura $P(D = 17\text{ h}) = 0$ et $P(D = 2\text{h}) = 0$ etc.…

- On peut étendre la définition ci-dessus à des variables aléatoires prenant des valeurs dans des intervalles non bornés, comme $[0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;+\infty[$ → voir II loi exponentielle définie sur $[0\,;+\infty[$

c. Interprétation graphique.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité f dont on donne la courbe.



- $P(c < X \leq d)$ est égal à l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe représentative de la densité de probabilité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = c$ et $x = d$

- $\int_a^b f(x)\,dx = 1$ donc l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de la densité de probabilité et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est égale à 1 unité d'aire.

d. <u>Espérance mathématique</u>

- Si X est définie sur I = [a ; b] $\quad E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx$

→ N.B. c'est le prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

- Si X est définie sur I = [a ; + ∞ [$\quad E(X) = \lim_{B \to +\infty} \int_a^B x f(x)\,dx$

II Un premier exemple de loi de probabilité continue : la loi exponentielle

(⟶ encore appelée : loi de durée de vie sans vieillissement)

1. <u>Définition</u>

Soit λ un réel strictement positif.

La loi exponentielle de paramètre λ est la loi de probabilité continue définie sur [0 ; + ∞ [par la fonction de densité $x \longrightarrow \lambda e^{-\lambda x}$

Autrement dit : si T est une variable aléatoire continue suivant une loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout réel t positif, on a $P(T \in [0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

2. <u>Calculs de probabilités</u> (résultats à savoir retrouver par un petit calcul d'intégrale)

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors :

- $P(T \in [0 ; t]) = P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$
- $P(T \in [t ; +\infty[) = P(T \ge t) = 1 - P(T \le t) = e^{-\lambda t}$
- $P(T \in [a ; b]) = P(a \le T \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

<u>Démonstration</u> :

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. <u>Propriété</u>

Soit T est une variable aléatoire continue suivant une loi exponentielle de paramètre λ
Pour tous réels t et h positifs, on a $P_{(T \ge t)}(T \ge t + h) = P(T \ge h)$

$P_{(T \ge t)}(T \ge t + h)$ est la proba. conditionnelle que T soit supérieur à $t + h$ sachant que T est supérieur à t

Cette propriété est appelée propriété de « durée de vie sans viellissement »

. . . .

. . . .

4. Espérance

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors :

- $E(T) = \lim\limits_{B \to +\infty} \int_0^B x\, f(x)\, dx$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ

A retenir : on montre que $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ → voir pistes de démo page 368

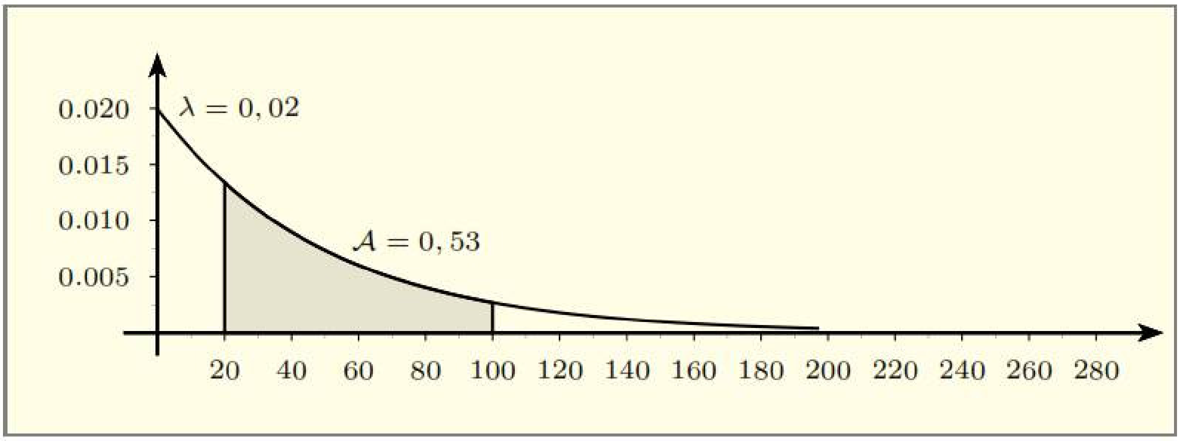
Exercice n° 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,02.

a/ Quelle est la fonction de densité f de cette loi :

. . . .

b/ On donne la courbe de cette fonction de densité :



Donner une interprétation graphique de la probabilité $P(20 \leq X \leq 100)$

. . . .

c/ Calculer la valeur exacte de cette probabilité $P(20 \leq X \leq 100)$

. . . .

. . . .

d/ Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. $E(X) =$ . . . .

Exercice n° 2

La durée de vie (en h) d'un composant électronique a été modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$.

1. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants ait une durée de vie inférieure à 1000 h ?
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants ait une durée de vie supérieure à 2000 h sachant qu'il fonctionnait encore au bout de 1000 h ?
3. Déterminer la durée de vie moyenne d'un de ces composants

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

IV Un autre exemple de loi de probabilité continue : la loi uniforme sur un intervalle [a ; b]

Définition

Soit X une variable aléatoire continue prenant des valeurs dans un intervalle I = $[a\,;b]$.

On appelle loi uniforme sur $[a\,;b]$ la loi de probabilité dont la fonction de densité f est la fonction constante définie sur $[a\,;b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$

Propriétés

- pour tout intervalle J = $[c\,;d]$ inclus dans I, on a : $P(X \in [c\,;d]) = \dfrac{\text{amplitude de J}}{\text{amplitude de I}} = \dfrac{d-c}{b-a}$
- L'espérance de la loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;b]$ est : $E(X) = \int_a^b x\,f(x)\,dx = \dfrac{a+b}{2}$

Démonstrations

Exemple : si X suit la loi uniforme sur $[0\,;10]$, $P(X \in [2\,;5]) = \dfrac{5-2}{10} = \dfrac{3}{10}$