Chap. n°

LOI NORMALE, ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

I Un autre exemple de loi de probabilité continue : la loi normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$

1. La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$

La loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0 ; 1)$, est la loi de probabilité continue définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction de densité $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}$

Autrement dit : si X est une variable aléatoire continue suivant la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$,
alors, pour tous réels a *et* b, on a $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)} dx$

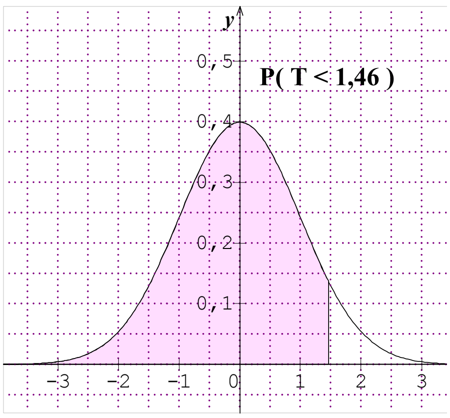
2. Courbe représentative de la fonction de densité

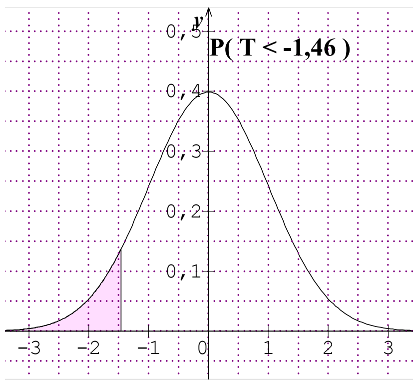
- L'aire sous la courbe de f est égale à 1. Elle représente $P(X \in \mathbb{R})$
- La courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

→ conséquences : $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0{,}5$

Pour tout réel u : $P(X \leq -u) = P(X \geq u) = 1 - P(X \leq u)$

Illustration :





3. Espérance, variance, et écart-type

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$E(X) = 1 \qquad V(X) = 1 \qquad \sigma(X) = 1$

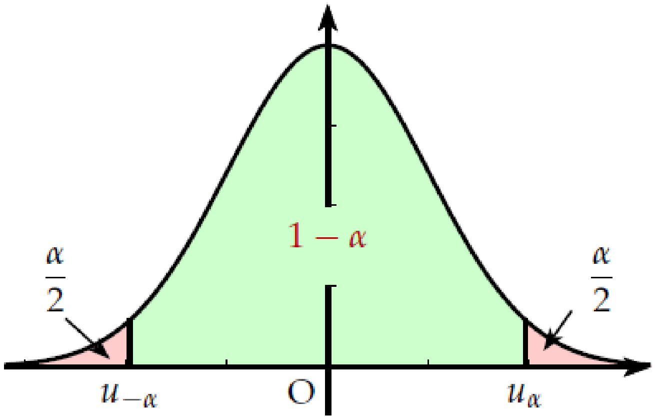
4. Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Pour tout réel $\alpha \in]\,0\,;1\,[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$

→ Deux valeurs à connaître : $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$ à 0,01 près

Illustration :



5. La loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$

Soit μ et σ deux réels avec $\sigma \neq 0$. Soit X une variable aléatoire continue définie sur $\mathbb{R}$.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$

Z s'appelle la variable aléatoire centrée réduite de **X**.

- Propriétés : si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ alors $E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$

- Valeurs remarquables à connaitre

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart type σ, alors :

- $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx \mathbf{0,683}$ à 0,001 près
- $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx \mathbf{0,954}$
- $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx \mathbf{0,997}$

- Remarque : l'expression de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ est :