EXERCICE 1 - POLYNÉSIE 2001

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2 + \cos x)\mathrm{e}^{1-x}$

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

   b. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $2 + \cos x + \sin x > 0$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{1-x}$. $\longrightarrow$ déjà démontré jeudi

   b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   c. Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -1 - \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$

Déterminer la primitive H de la fonction h, qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.

EXERCICE 2 - FONCTION TANGENTE

On définit la fonction tangente par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de cette fonction.
2. Montrer que cette fonction est impaire. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?
3. Montrer que pour tout réel de D, on a : $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
4. Dresser le tableau de variation de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. **Approfondissement :** étudier la limite de la fonction tangente à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire lorsque x tend vers $\dfrac{\pi}{2}$ avec $x < \dfrac{\pi}{2}$. En déduire par symétrie la limite de la fonction tangente à droite de $-\dfrac{\pi}{2}$.