Révisions controle commun 2nde (1)

Correction 1

1. a. La droite $x=-3$ intercepte la courbe au point de coordonnées $(-3\,;1{,}5)$: l'image de -3 par la fonction f est $1{,}5$.

   b. La droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$: l'image de $-\frac{1}{2}$ par la fonction f est 0.

   c. La droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\left(\frac{1}{2}\,;2\right)$: l'image de $\frac{1}{2}$ par la fonction f est 2.

   d. La droite d'équation $x=0$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $(0\,;1)$: l'image de 0 par la fonction f est 1.

2. a. La droite d'équation $y=3$ intercepte la courbe $\mathscr{C}$ au point d'intersection $(1\,;3)$: le nombre 3 admet pour unique antécédent le nombre 1.

   b. L'ensemble des antécédents du nombre -1 est :
   $\{-2\ ;\ -1\}$

   c. La droite d'équation $y=-2$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}$: le nombre -2 n'admet d'antécédents.

Correction 2

1. a. La droite d'équation $x=0{,}5$ intercepte la courbe $\mathscr{C}_f$ au point de coordonnées $(0{,}5\,;2)$. Ainsi, l'image du nombre $0{,}5$ par la fonction f a pour valeur 2.

   b. La droite d'équation $y=-1$ intercepte la courbe aux points de coordonnées :
   $(-3\,;-1)$; $(2{,}5\,;-1)$; $(3{,}5\,;-1)$
   Ainsi, l'ensemble des antécédents du nombre -1 par la fonction f est :
   $\{-3\,;\ 2{,}5\,;\ 3{,}5\}$

2. a. L'image du nombre -1 par la fonction f a pour valeur $3{,}5$.
   Car le point de coordonnées $(-1\,;3{,}5)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   b. L'ensemble des antécédents de 2 par la fonction f est :
   $\{-2\,;\ 0{,}5\}$
   Car les points de coordonnées $(-2\,;2)$ et $(0{,}5\,;2)$ sont les seuls points de la courbe $\mathscr{C}_f$ à avoir 2 pour ordonnée.

3. a. Le nombre 5 n'a pas d'image par la fonction f car l'ensemble de définition de la fonction f est $]-4\,;4]$.

   b. Le nombre 4 n'admet pas d'antécédent par la fonction f car la droite d'équation $y=4$ n'intercepte pas la courbe $\mathscr{C}_f$.

Correction 3

x	$1{,}5$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\sqrt{2}$
$f(x)$	$2{,}5$	1	-3	$-3\sqrt{2}-2$
$g(x)$	$2{,}25$	1	$\frac{1}{9}$	2
$h(x)$	$\frac{4}{7}$	1	-1	$\frac{2}{3\sqrt{2}-1}$

Correction 4

- L'image du nombre 2 par la fonction f a pour valeur :
  $f(2)=\frac{3\times2}{2\times2-3}=\frac{6}{4-3}=\frac{6}{1}=6$
  Ainsi, le point A de coordonnées $(2\,;2)$ n'appartient à la courbe représentative de la fonction f.
- L'imge du nombre $0{,}5$ par la fonction f a pour valeur :
  $f(0{,}5)=\frac{3\times0{,}5}{2\times0{,}5-3}=\frac{1{,}5}{1-3}=\frac{1{,}5}{-2}=-\frac{3}{4}$
  Ainsi, le point B de coordonnées $\left(0{,}5\,;-\frac{3}{4}\right)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f.

Correction 5

Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ s'interceptent en trois points dont les coordonnées sont :
$(-4\,;0)$; $(-3\,;a)$; $(1\,;b)$
où on a les valeurs approchées : $a\approx0{,}8$ et $b\approx3{,}8$

Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Graphiquement, on obtient que l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S}=\{-4\,;-3\,;1\}$

Correction 6

Partie A

1. $f(3)=8$
2. $f(0)=-7$
3. $y_C=8$
4. Les antécédents de 5 sont 2 et 6.
5. $f(x)=0$ pour $x\in\{\ 1\ ;\ 7\ \}$.
6. $f(x)\geqslant-2$ pour $x\in[\ 0{,}7\ ;\ 7{,}3\ ]$.
7. Le maximum de f est 9.
8. Il est atteint en $x=4$.

Partie B

1. $g(x)=(x-3)^2-16=x^2-6x+9-16=x^2-x-7$
2. $(x-7)(x+1)=x^2+x-7x-7=x^2-6x-7=g(x)$
3. a. $g(\sqrt{2})=\left(\sqrt{2}-3\right)^2-16=2-6\sqrt{2}+9-16=-5-6\sqrt{2}$

   b. $g\left(\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}-3\right)^2-16=\left(\frac{9}{2}-\frac{6}{2}\right)^2-16=\left(\frac{3}{2}\right)^2-16=\frac{9}{4}-\frac{64}{4}=-\frac{55}{4}$

c.

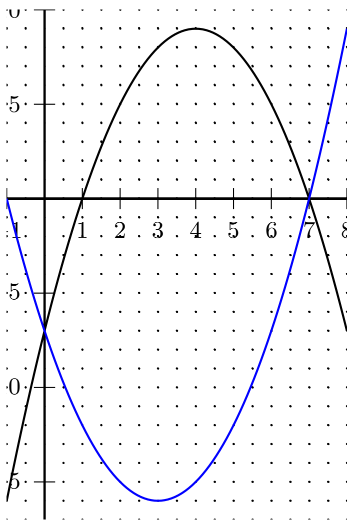
$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff (x-7)(x+1) = 0 \\ &\iff x-7 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ &\iff x = 7 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

0 a deux antécédents : 7 et -1.

4.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	0	-7	-12	-15	-16	-15	-12	-7	0	9

5.



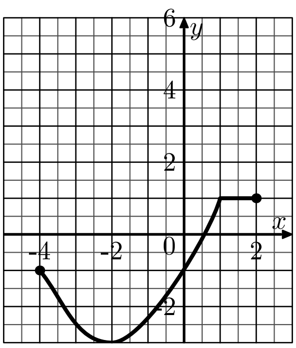
6. a. $f(x) = g(x)$ pour $x \in \{\ 0\ ;\ 7\ \}$.

b. $f(x) > g(x)$ pour $x \in\ ]\ 0\ ;\ 7\ [$.

Correction 7

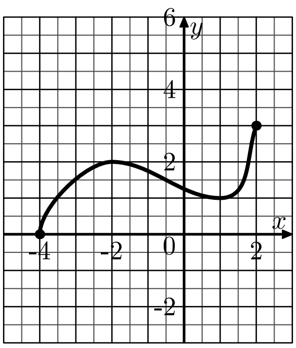
Voici les différentes associations des courbes représentatives et de leurs tableaux de variation :

- Pour la fonction f :



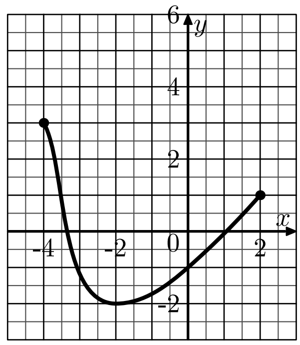
x	-4		-2		1		2
Variation de f	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\rightarrow$	1

- Pour la fonction g :



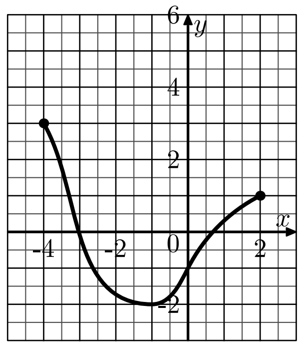
x	-4		-2		1		2
Variation de f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

- Pour la fonction h :



x	-4		-2		0		2
Variation de f	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1

- Pour la fonction j :



x	-4		-1		0		2
Variation de f	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	1

Correction 8

a. $f(-5) > f(3)$

b. $f(6) < f(-4)$

c. $f(-6) > f(4)$

d. $f(-4{,}75) \in \big[-2\,;2\big]$ et $f(7) \in \big[-3\,;0\big]$.
On ne peut conclure.

e. f est croissante sur $\left[-\dfrac{9}{2}\,;-1\right]$:
$f(-3) < f(-2)$

f. f est décroissante sur $\big[0\,;\,3\big]$:
$f(1) > f(2)$

g. $f(-10) \in \big[-2\,;5\big[$ et $f(-3) \in \big[2\,;6\big]$.
On ne peut conclure.

h. $f(7) < f(-2)$.

Correction 9

1. La fonction f a pour ensemble de définition l'intervalle $[0\,;7]$

2.

x	0		1		$2,5$		$4,5$		6		7
Variation de f	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	$2,5$

3. Sur $\left[0\,;\dfrac{5}{2}\right]$, la fonction f atteint son maximun 3 pour $x=1$.

4. La valeur maximale prise par la fonction f sur son ensemble de définition est 4 ; cette valeur sera atteinte pour $x=4{,}5$

5. Le minimum de la fonction f est 0 et est atteinte pour $x=2{,}5$

Correction 10

1. La forme factorisée de l'expression $-4x^2+4x+3$ est :
$$\left(2x+1\right)\left(3-2x\right) = 6x-4x^2+3-2x$$
$$= -4x^2+4x+3$$

2. Vérifions que les valeurs sont $a=3$ et $b=-5$:
$$\left(2x+1\right)\left(3x-5\right) = 6x^2-10x+3x-5$$
$$= 6x^2-7x-5$$

Correction 11

1. Voici deux contraintes sorties de la figure :
   - Pour que la longueur HS soit définie, il faut que la valeur de x soit strictement plus grande que 1 ;
   - Pour que la longueur GL soit définie, il faut que la valeur de x soit strictement plus grande que 3.

   On en déduit que le nombre réel x doit appartenir à l'intervalle $\left]3\,;+\infty\right[$.

2. - Le polygone $ABCSD$ est composé :
     - Du carré $ABCD$ d'aire x^2.
     - Du triangle DCS d'aire $\dfrac{x(x-1)}{2}$

     Son aire a pour valeur : $\mathcal{A} = x^2+\dfrac{1}{2}{\cdot}x{\cdot}(x-1)$
   - Le polygone $EFLKJI$:
     - Le rectangle $EFGI$ a pour aire $6{\cdot}x$.
     - Le rectangle $KLGJ$ a pour aire $2{\cdot}\left(x-3\right)$.

     Son aire a pour valeur : $\mathcal{A}' = 6{\cdot}x-2{\cdot}\left(x-3\right)$

3. a. On a le développement :
$$\left(\frac{3}{2}{\cdot}x-6\right)\left(x+1\right) = \frac{3}{2}{\cdot}x^2+\frac{3}{2}{\cdot}x-6{\cdot}x-6$$
$$= \frac{3}{2}{\cdot}x^2+\frac{3}{2}{\cdot}x-\frac{12}{2}{\cdot}x-6 = \frac{3}{2}{\cdot}x^2-\frac{9}{2}{\cdot}x-6$$
On vient d'établir la factorisation.

   b. L'égalité des aires entraine la relation :
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$$
$$x^2+\frac{1}{2}{\cdot}x{\cdot}(x-1) = 6{\cdot}x-2{\cdot}\left(x-3\right)$$
$$x^2+\frac{1}{2}{\cdot}x^2-\frac{1}{2}{\cdot}x = 6{\cdot}x-2{\cdot}x+6$$
$$\frac{3}{2}{\cdot}x^2-\frac{1}{2}{\cdot}x = 4{\cdot}x+6$$
$$\frac{3}{2}{\cdot}x^2-\frac{1}{2}{\cdot}x-4{\cdot}x-6 = 0$$
$$\frac{3}{2}{\cdot}x^2-\frac{1}{2}{\cdot}x-\frac{8}{2}{\cdot}x-6 = 0$$
$$\frac{3}{2}{\cdot}x^2-\frac{9}{2}{\cdot}x-6 = 0$$
D'après la factorisation de la question b. :
$$\left(\frac{3}{2}{\cdot}x-6\right)\left(x+1\right) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$\frac{3}{2}{\cdot}x-6=0$	$x+1=0$
$\frac{3}{2}{\cdot}x=6$	$x=-1$
$x=\dfrac{6}{\frac{3}{2}}$	
$x=6\times\dfrac{2}{3}$	
$x=4$	

Puisque la valeur de x est un nombre réel strictement plus grande que 3, on en déduit que seule la valeur 4 permet à ces deux surfaces d'avoir la même aire.

Correction 12

1.
$$(x+2)(3-x)+2(x-3)(2x-5) = 0$$
$$(x+2)\left[-(x-3)\right]+2(x-3)(2x-5) = 0$$
$$-(x+2)(x-3)+2(x-3)(2x-5) = 0$$
$$(x-3)\left[-(x+2)+2(2x-5)\right] = 0$$
$$(x-3)(-x-2+4x-10) = 0$$
$$(x-3)(3x-12) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-3=0$	$3x-12=0$
$x=3$	$3x=12$
	$x=\dfrac{12}{3}$
	$x=4$

Cette équation a pour ensemble des solutions :
$\mathcal{S} = \left\{3\,;\,4\right\}$

2.
$$(6-2x)(3x+2) = (3x-9)(x+2)$$
$$(6-2x)(3x+2)-(3x-9)(x+2) = 0$$
$$\left[-2(x-3)\right](3x+2)-\left[3(x-3)\right](x+2) = 0$$
$$-2(x-3)(3x+2)-3(x-3)(x+2) = 0$$
$$(x-3)\left[-2(3x+2)-3(x+2)\right] = 0$$
$$(x-3)(-6x-4-3x-6) = 0$$
$$(x-3)(-9x-10) = 0$$
Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$x-3=0$	$-9x-10=0$
$x=3$	$-9x=10$
	$x=-\dfrac{10}{9}$

Cette équation a pour ensemble des solutions :
$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{10}{9}\,;\,3\right\}$

Correction 13

1.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x{+}1)(3{+}x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)(4x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{2-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

4.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		1		$+\infty$
$4x+1$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Correction 14

1. On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-4		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+4)(1-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'inéquation $(x+4)(1-2x) \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left[-4\,;\frac{1}{2}\right]$

2. On a la factorisation suivante :

$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2}$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'équation $\dfrac{x^2-1}{x+2} < 0$ admet pour solution d'après le tableau de signe l'ensemble suivant :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-1\,;1\right[$

Correction 15

a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$(x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1)$$
$$(x+1)(1-x) - (2x-1)(x+1) > 0$$
$$(x+1)\big[(1-x)-(2x-1)\big] > 0$$
$$(x+1)(1-x-2x+1) > 0$$
$$(x+1)(2-3x) > 0$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+1)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'inéquation a pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left]-1\,;\frac{2}{3}\right[$

b. On a les transformations algébriques suivantes :

$$x^3 - x \leqslant 0$$
$$x\cdot(x^2-1) \leqslant 0$$
$$x\cdot(x+1)(x-1) \leqslant 0$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x+1)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Cette équation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[0\,;1\right]$

c. On a les transformations algébriques suivantes :

$$(x+1)^2 - (x+1)(2-x) \geqslant 0$$
$$(x+1)\big[(x+1)-(2-x)\big] \geqslant 0$$
$$(x+1)(x+1-2+x) \geqslant 0$$
$$(x+1)(2x-1) \geqslant 0$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :

$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

d. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{x+1}{x-1} < -1$$
$$\frac{x+1}{x-1} + 1 < 0$$
$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} < 0$$
$$\frac{(x+1)+(x-1)}{x-1} < 0$$
$$\frac{2x}{x-1} < 0$$

Etudions le signe de l'expression du membre de gauche :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{2x}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Cette inéquation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left]0\,;1\right[$

