Corrigé DS n° 2

Exercice 1 — 2,5 pts

• La courbe $\mathscr{C}_1$ représente une fonction f_1 décroissante sur D $=]0;+\infty[$. Donc la dérivée de f_1 serait négative sur D, or aucune autre courbe n'est située entièrement sous l'axe des abscisses.
On en déduit donc que $\mathscr{C}_1$ est la courbe de f''.

• $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de l'axe des abscisses, donc représente une fonction f_1 positive sur D $=]0;+\infty[$.
Donc f' est croissante sur D.
On en déduit que $\mathscr{C}_3$ est la courbe de f'.

• $\mathscr{C}_2$ est donc la courbe de f.

Exercice 2 — 3 pts + 1,5 pts

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2e^{-2x+1} + 2$ et $f''(x) = 4e^{-2x+1}$
Comme la fonction exp est positive sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$. — 1,5 pts

(b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 - 2 = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 2 = 0$
Donc une équation de la tangente $T_{\frac{1}{2}}$ est : $y = 0$. — 1 pt

(c) Comme f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe est située au-dessus de ses tangentes donc en particulier de $T_{\frac{1}{2}}$.
Ainsi , pour tout réel x, on a : $f(x) \geqslant 0$.
$f(x)$ est donc positif sur $\mathbb{R}$. — 0,5 pt

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2e^{-2x+1} + 2$

$$\begin{aligned} -2e^{-2x+1} + 2 > 0 &\iff e^{-2x+1} < 1 \\ &\iff -2x + 1 < 0 \\ &\iff x > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↗	

Donc f admet bien un minimum en $x = \frac{1}{2}$. — 1 pt

(b) Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ on peut en déduire que $f(x)$ est donc positif sur $\mathbb{R}$ car le minimum de f est 0. — 0,5 pt

Exercice 3 — 5 pts + 1 pt + 1 pt

1. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = (2x-1)^3 e^{-x^2}$.

(a) f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) &= 3 \times 2 \times (2x-1)^2 e^{-x^2} + (2x-1)^3(-2x)e^{-x^2} \\ &= (2x-1)^2 e^{-x^2}\left[6 + (2x-1)(-2x)\right] \\ &= (-4x^2 + 2x + 6)(2x-1)^2 e^{-x^2} \\ &= 2(-2x^2 + x + 3)(2x-1)^2 e^{-x^2} \end{aligned}$$

1 pt — 1 pt

(b) Etudions le signe de $f''(x)$: — 2 pts

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(2x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
e^{-x^2}		$+$		$+$		$+$		$+$	
2		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-2x^2 + x + 3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que :

- f est convexe sur $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$
- f est concave sur $]-\infty;-1]$ et sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$
- la courbe de f admet deux points d'inflexion d'abscisses -1 et $\frac{3}{2}$.

2. (a) FAUX. La fonction f est croissante sur $[1;2]$ car $f'(x) \geqslant 0$ sur $[1;2]$ — 1 pt

(b) FAUX.. La fonction f est convexe sur $[-2;-1]$ car f' croissante sur $[-2;-1]$. — 1 pt

(c) VRAI. La courbe de f admet deux points d'inflexion car sa dérivée f' change de sens de variation en -2 et en 1. — 1 pt

EXERCICE 4 2,5 pts + 3,5 pts

1. f est dérivable sur D, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x \in \mathrm{D}, \quad f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x} \times (1-x) - (-1)\mathrm{e}^{2x}}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2x} \times (2-2x+1)}{(1-x)^2}$$
$$= \frac{(3-2x)\mathrm{e}^{2x}}{(1-x)^2}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
e^{2x}		$+$		$+$		$+$	
$(1-x)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	‖	↗	$-2\mathrm{e}^3$	↘	

2,5 pts

2. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle I=$]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.
Comme, pour tout x dans I, on a $(1-x)>0$ et donc $(1-x)^3>0$ et $\mathrm{e}^{2x}>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est le signe du trinôme : $4x^2-12x+10$.
Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta=-16$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et est positif pour tout réel x.
Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement positives sur I, on en déduit que la fonction f est convexe sur I. 1,5 pts

(b) Pour déterminer l'équation de T_0, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

— $f'(0) = \dfrac{(3)\mathrm{e}^0}{(1-0)^2} = 3$;

— $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{1-0} = 1$.

D'où l'équation réduite de T_0 :
$y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=3x+1$ 1 pt

(c) Puisque f est convexe sur l'intervalle I, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur I, notamment au-dessus de la tangente T_0.
Pour tout réel x dans cet intervalle I, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc supérieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T_0.

On en déduit donc :

$$x \in]-\infty\,;\,1[\implies f(x) \geqslant 3x+1$$
$$\implies \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-x} \geqslant 3x+1$$
$$\implies \mathrm{e}^{2x} \geqslant (1-x)(3x+1) \quad \text{car sur }]-\infty\,;\,1[, \quad 1-x>0$$
$$\implies \mathrm{e}^{2x} \geqslant (3x+1)(1-x)$$
$$\implies \mathrm{e}^{2x} \geqslant -3x^2+2x+1$$

On arrive donc à l'inégalité demandée. 1 pt