Corrigé DS n° 1

Exercice 1

1. On cherche a et b tel que $\boxed{f(-2)=-3}$ et $\boxed{f'(-2)=0}$ 0,25 pt

   - $f(-2)=\dfrac{4-2a+b}{-1}=-4+2a-b$
   - f est dérivable sur D en tant que fonction rationnelle définie sur D et

   $$\forall x\in D,\quad f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(1)(x^2+ax+b)}{(x+1)^2}=\ldots$$
   $$=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$$ 1 pt

   d'où $f'(-2)=a-b$

   - $$\begin{cases} f(-2) &= -3\\ f'(-2) &= 0\end{cases}\iff\begin{cases} -4+2a-b &= -3\\ a-b &= 0\end{cases}\iff\begin{cases} 2a-b &= 1\\ a &= b\end{cases}$$

   $$\iff\begin{cases} 2a-a &= 1\\ a &= b\end{cases}\iff\begin{cases} a &= 1\\ b &= 1\end{cases}$$ 1 pt

   - bilan : $\forall x\in D,\quad \boxed{f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}}$

2. $\forall x\in D,\quad x+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x)(x+1)+1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=f(x)$ 0,5 pt

3. $\forall x\in D,\quad \boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}}$ 0,5 pt

   $\longrightarrow$ Voir expression de $f'(x)$ obtenue au 1. en remplaçant a et b par leur valeur)

   Tableau de variations de f : 1 pt

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	-3	↘	‖	↘	1	↗	

4. La droite Δ a pour coefficient directeur -1.
   On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles on a $f'(x)=-1$. 0,5 pt

   Soit $x\in D$

   $$\begin{aligned} f'(x)=-1 &\iff \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=-1\\ &\iff x^2+2x=-(x+1)^2 \quad \text{0,25 pt}\\ &\iff x^2+2x=-x^2-2x-1\\ &\iff 2x^2+4x+1=0\\ &\iff x=\frac{-4-\sqrt{8}}{4}\quad\text{ou}\quad x=\frac{-4+\sqrt{8}}{4}\qquad(\Delta=8)\\ &\iff x=\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\quad\text{ou}\quad x=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

   Ainsi la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à Δ aux pointx d'abscisse $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$ 0,5 pt

Exercice 2

Soit f définie sur $D=[0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.

f est de la forme e^u, donc f est dérivable sur tout intervalle où u est dérivable.
Ainsi f est dérivable sur $I=]0;+\infty[$.

$\forall x\in I,\ f'(x)=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$ 0,75 pt

$f'(4)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4$ et $f(4)=\mathrm{e}^4$. 0,5 pt

D'où une équation de la tangente demandée : $T_4:\ y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4(x-4)+\mathrm{e}^4$.

$$y=\frac{1}{2}\mathrm{e}^4x-\mathrm{e}^4.$$ 0,25 pt

Exercice 3

1. Etude du sens de variation de la suite : 2 pts
   — **Méthode 1** : étude du signe de $u_{n+1}-u_n$

   $$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\frac{3(n+1)-2}{n+2}-\frac{3n-2}{n+1}$$
   $$=\frac{(3n+1)(n+1)-(n+2)(3n-2)}{(n+2)(n+1)}=\ldots=\frac{5}{(n+2)(n+1)}>0$$

   Donc la suite (u_n) est croissante.

— **Méthode 2** : étude des variations sur $I = [0;+\infty[$ de la fonction f telle que $u_n = f(n)$

On a $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$

$\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{3(x+1)-(1)(3x-2)}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$

f est croissante sur I, donc la suite (u_n) est croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 3 = \dfrac{3n-2}{n+1} - 3 = \dfrac{-5}{n+1} < 0$

Donc on a bien $u_n < 3$ pour tout entier n. 1 pt

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - (-2) = \dfrac{3n-2}{n+1} + 2 = \dfrac{5n}{n+1} \geqslant 0$

Donc on a bien $u_n \geqslant -2$ pour tout entier n. 1 pt

N.B. on pouvait aussi remarquer que $u_0 = -2$ et donc comme (u_n) croissante, conclure que, pour tout n, $u_n \geqslant u_0$, soit $u_n \geqslant -2$.

Bilan : pour tout entier n, on a : $u_n \in [-2;3[$

EXERCICE 4

1. On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{1+\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{4}{5}$. 0,25 pt

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

(a) On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{4}{5}$; et on a bien $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{4}{5} \leqslant 2$, donc :

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 0,5 pt

Hérédité : on suppose que pour un entier n donné, on a , $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

La fonction f étant croissante sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit :

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

Or on a vu que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$ et on a $f(2) = \dfrac{8}{1+6} = \dfrac{8}{7}$;

de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\dfrac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \dfrac{8}{7}$.

Or $\dfrac{1}{2} < \dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :

$\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$. 1,5 pts

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. 0,25 pt

(b) On peut en déduire que la suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{\frac{1+3u_n-4u_n}{1+3u_n}}$$

$$v_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n-4u_n} = \frac{4u_n}{1-u_n} = 4\frac{u_n}{1-u_n} = 4v_n.$$

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4. 1,5 pts

(b) On a $v_0 = \dfrac{u_0}{1-u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$. 0,5 pt

(c) Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n}{1-u_n} &\iff v_n(1-u_n) = u_n \\ &\iff v_n - u_n v_n = u_n \\ &\iff v_n = u_n v_n + u_n \\ &\iff v_n = u_n(v_n+1). \end{aligned}$$

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n+1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. 1 pt

(d) On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{4^n}{4^n+1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$ (ou après factorisation par 4^n) :

$u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0{,}25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1+0{,}25^n}$.

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}25^n = 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$. 1 pt

Exercice 5

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
   $-1 \leqslant \cos(n^2) \leqslant 1$ — 0,5 pt
   d'où : $-2 \leqslant 2\cos(n^2) \leqslant 2$ — 0,25 pt
   $-9 \leqslant 2\cos(n^2) - 7 \leqslant -5$ — 0,25 pt
   $\dfrac{1}{-9} \geqslant \dfrac{1}{2\cos(n^2)-7} \geqslant \dfrac{1}{-5}$
   $\longrightarrow$ car fonction inverse décroissante sur $]-\infty;0[$ — 0,75 pt
   $\dfrac{2-3n}{-9} \leqslant \dfrac{2-3n}{2\cos(n^2)-7} \leqslant \dfrac{2-3n}{-5}$ (car $2-3n<0$ pour $n \geqslant 1$) — 0,75 pt
   Donc on a, pour tout $n \geqslant 1$: $u_n \geqslant \dfrac{2-3n}{-9} = \dfrac{3n-2}{9}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n-2}{9}\right) = +\infty$, on en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n) = +\infty$ et donc que cette suite n'est pas majorée. — 0,5 pt

Exercice 6

- $u_n = \dfrac{2n^3-n+1}{3n^2+n} = \dfrac{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)} = n \times \dfrac{2-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n}}$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$
  d'où (par produit et quotient) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ — 1,5 pts
- $\sqrt{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{2})^n = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5(\sqrt{2})^n\right) = -\infty$ — 1 pt
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $1 \leqslant 2-\sin n \leqslant 3$
  d'où $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{2-\sin n}{n^2} \leqslant \dfrac{3}{n^2}$ (car $n^2 > 0$
  ainsi $\dfrac{1}{n^2} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{3}{n^2}$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n^2} = 0$
  Donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :
  $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 0$ — 1,5 pts

Exercice 7

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \end{cases}$

1. $u_1 = u_0 + 2\times 0 + 3 = 4$ et $u_2 = u_1 + 2\times 1 + 3 = 9$. — 0,5 pt
2. **Conjecture** : il semble que $u_n = (n+1)^2$ — 0,5 pt
   Soit $\mathscr{P}(n)$ la proposition : $u_n = (n+1)^2$
   - *Initialisation* : on a bien $(0+1)^2 = 1 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité* : on suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n donné.

   Hyp. de récurrence : $u_n = (n+1)^2$
   on a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$
   d'où $u_{n+1} = (n+1)^2 + 2n + 3$
   d'où $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3$
   d'où $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4$
   d'où $u_{n+1} = (n+2)^2$

   On a ainsi montré que : $\mathscr{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow$ $\mathscr{P}(n+1)$ vraie
   - *Bilan* : on peut donc conclure,d'après le principe de récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = (n+1)^2$. — 1,5 pts

Exercice 8

On cherche deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = -\infty$

Exemple : $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{-1}{n}$ — 1 pt
On a donc $u_n \times v_n = -n$