Barème sur 25 points

EXERCICE 1 — 5 pts

Soit la fonction rationnelle f définie sur $D = \mathbb{R}_{\setminus\{-1\}}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$ où a et b sont des réels.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer a et b tels que la courbe $\mathscr{C}$ admette une tangente horizontale au point A de coordonnées $(-2;-3)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$.
3. Déterminer la dérivée de f, puis dresser le tableau de variation de f sur D.
4. Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -x$.

EXERCICE 2 — 1,5 pts

Soit la fonction f définie sur $D = [0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

EXERCICE 3 — 3,5 pts

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$

1. Déterminer le sens de variation de cette suite.
2. Démontrer que, pour tout entier n, on a : $u_n \in [-2;3[$

EXERCICE 4 — 6 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1.
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Tournez svp !

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 5 **3 pts**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par : $u_n = \dfrac{2-3n}{2\cos(n^2)-7}$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n \geqslant \dfrac{3n-2}{9}$

2. En déduire que cette suite n'est pas majorée.

EXERCICE 6 **3 pts**

Etudier la limite de chacune des suites suivantes, définies pour tout entier n non nul :

$u_n = \dfrac{2n^3-n+1}{3n^2+n}$ $\qquad$ $v_n = -5(\sqrt{2})^n$ $\qquad$ $w_n = \dfrac{2-\sin n}{n^2}$

EXERCICE 7 **2 pts**

On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad \text{pour tout entier } n \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EXERCICE 7 **1 pt**

Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = -\infty$