Corrigé Interro n° 1

Exercice 1

$U_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n}$

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$

Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

- **Initialisation**

  $\frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{2} = u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie pour un entier n donné.

  c'est-à-dire que : $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

  $$\text{D'où :}\quad U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n} = \frac{2\times\frac{2^n}{1+2^n}}{1+\frac{2^n}{1+2^n}}$$

  $$= \frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^n}}{\frac{1+2^n+2^n}{1+2^n}}$$

  $$= \frac{2^{n+1}}{1+2^n+2^n}$$

  $$= \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}} \qquad \text{car } 2^n+2^n = 2\times 2^n = 2^{n+1}$$

  On a donc montré que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout n, on a : $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

Exercice 2

Soit une suite (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2 + 3$

On considère la proposition $P(n)$: $\boxed{v_n \leqslant -4}$

Montrer que $P(n)$ est héréditaire.

On suppose la propriété vraie pour un entier n donné.

c'est-à-dire que : $v_n \leqslant -4$.

D'où : $v_n^2 \geqslant 16$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$

$-\frac{1}{2}v_n^2 \leqslant -8$ (on multiplie par un négatif)

$-\frac{1}{2}v_n^2 + 3 \leqslant -5$

$v_{n+1} \leqslant -5$

D'où $v_{n+1} \leqslant -4$ car $-5 \leqslant -4$

On a donc montré que si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi, donc que $P(n)$ est héréditaire.