

Partie A

- 1.
- f
- est dérivable sur
- $\mathbb{R}$
- en tant que fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3}{2}x - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right), \text{ donc } f'(x) \text{ est du signe de } x - \frac{4}{3}.$$

f est une fonction polynôme donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty.$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$x - \frac{4}{3}$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$

2. soit
- $x \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$
- .

f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, donc $f\left(\frac{4}{3}\right) \leq f(x) \leq f(2)$.

$$\text{Or } f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3} \quad \text{et} \quad f(2) = 2.$$

$$\text{Donc } \frac{5}{3} \leq f(x) \leq 2 \text{ et } a \text{ fortiori : } \frac{4}{3} \leq f(x) \leq 2.$$

On a donc montré que l'intervalle $I = \left[\frac{4}{3}; 2\right]$ est stable par la fonction f .

- 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) = \frac{3}{4}(x-2)^2$

Pour tout réel x , $(x-2)^2 \geq 0$ donc $f(x) - x \geq 0$ donc $x \leq f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étude du cas :
- $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$
- .

- (a) On va démontrer **par récurrence** que la proposition $\mathcal{P}_n$: $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ est vraie pour tout entier naturel n .

• Initialisation

D'après la question précédente, on a $x \leq f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $u_0 \leq f(u_0)$, ce qui revient à $u_0 \leq u_1$.

De plus, si $x \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x) \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$ donc $f(u_0) \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$ et donc $u_1 \in \left[\frac{4}{3}; 2\right]$ et donc $u_{n+1} \leq 2$.

Donc $u_0 \leq u_1 \leq 2$; la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

On est dans l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$ donc la fonction f est croissante; on en déduit : $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$.

$$\text{Or } f(u_n) = u_{n+1}, f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(2) = 2.$$

Donc on a : $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$; la proposition est héréditaire.

• Conclusion

La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire, on en déduit d'après le principe de récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Pour tout n , on a $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 2; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leq 2$.

- (c) La suite (u_n) est définie par $f(u_n) = u_{n+1}$

La suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ

f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ .

Donc d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff \frac{3}{4}(\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2.$$

La suite (u_n) converge donc vers 2.

2. Étude du cas :
- $u_0 = 3$
- .

```
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while u < 100
        u = 3*u*u/4 - 2*u + 3
        n = n + 1
    return n
```

3. Étude du cas : $u_0 > 2$.

Pour tout réel x , on a : $x \leq f(x)$ donc, pour tout n , $u_n \leq f(u_n)$ soit $u_n \leq u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc croissante.

On en déduit que pour tout n , on a : $u_n \geq u_0$.

Supposons que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .

On aurait alors : $\ell \geq u_0$.

D'où $\ell > 2$

Or on a vu, d'après le théorème du point fixe, que la seule limite possible de la suite (u_n) était $\ell = 2$; donc on aboutit à une contradiction.

On en déduit que, pour $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

EXERCICE 2

1. (a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{2}{1} \neq \frac{-2}{-1}$ donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent ainsi un plan $\mathcal{P}$.

(b) On a $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, puis

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0$;
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Puisque $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$.

(c) Puisque $\overrightarrow{CD}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, on sait qu'une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme : $2x + 1y - 1z + d = 0$ (avec $d \in \mathbb{R}$)

En particulier $C(2 ; -2 ; -1) \in \mathcal{P} \iff 2 \times 2 + 1 \times (-2) - 1 \times (-1) + d = 0 \iff 4 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -3$.

Finalement : $M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + y - z - 3 = 0$.

2. (a) On a grâce aux coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$, $CD^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, d'où $CD = \sqrt{6}$.

(b) Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan $\mathcal{P}$, ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de $\mathcal{P}$ situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D.

3. (a) Soit M un point de Δ . On a donc $M(0 ; 2 + t ; -1 + t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

$2x_M + y_M - z_M - 3 = 2 \times 0 + 2 + t - 1 - 3 = 0$

Cela montre que tout point de Δ appartient à $\mathcal{P}$ donc que Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

(b) Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .

Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec $H(0 ; 2 + t ; -1 + t)$, on a

$\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 + t \\ 1 + t \end{pmatrix}$.

Or $(DH) \perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \iff 0 + 3 + t + 1 + t = 0 \iff 4 + 2t = 0 \iff 2t = -4 \iff t = -2$.

On a donc $H(0 ; 0 ; -3) \in \Delta$.

(c) On a donc $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 - 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; il en résulte que $DH^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2 = 18$.

Finalement $d(D, \Delta) = DH = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

EXERCICE 3

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_2$ est $\overrightarrow{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\frac{2}{-5} \neq \frac{-3}{2}$ donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

-

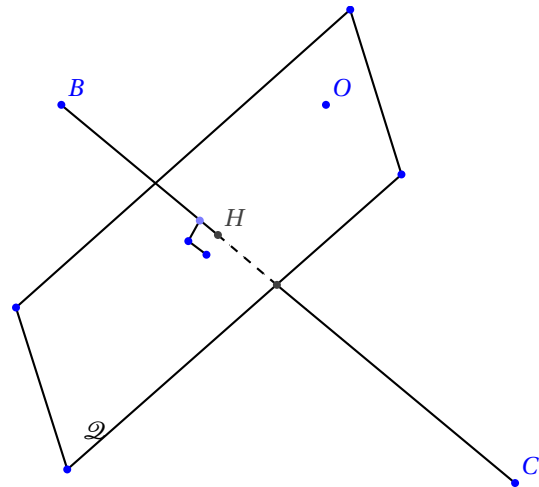
Déterminons l'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ en résolvant le système $\begin{cases} 1 + 2t = -5t' + 3 \\ 2 - 3t = 2t' \\ 4t = t' + 4 \end{cases}$ (S)

(S) $\iff \begin{cases} 2t + 5t' = 2 \\ 3t + 2t' = 2 \\ 4t - t' = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 2t + 5(4t - 4) = 2 \\ 3t + 2(4t - 4) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ 22t = 22 \\ 11t = 10 \end{cases}$

D'où (S) $\iff \begin{cases} t' = 4t - 4 \\ t = 1 \\ t = \frac{10}{11} \end{cases}$

Puisque le système n'a pas de solution, alors les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas sécantes. Les droites ne sont ni parallèles, ni sécantes donc sont non coplanaires.

EXERCICE 4



On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).

$$1. \quad \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}. \quad (\text{car } \overrightarrow{BH} \text{ est le projeté orthogonal de } \overrightarrow{BO} \text{ sur } \overrightarrow{BC})$$

$$\text{On a } \overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = t \times \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = t \times BC^2.$$

$$\text{D'où : } t = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{BC^2}$$

$$2. \quad \text{On calcule ensuite avec les coordonnées } \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ et } BC^2$$

$$\overrightarrow{BO}(2; 6; -5) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC}(-2; 6; -8)$$

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 + 36 + 40 = 72$$

$$t = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}.$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC}$$

Donc OH a pour coordonnées :

$$\left(-2 + \frac{9}{13} \times (-2); -6 + \frac{9}{13} \times (6); 5 + \frac{9}{13} \times (-8) \right) = \left(\frac{-44}{13}; \frac{-24}{13}; \frac{-7}{13} \right).$$

Ce sont aussi les coordonnées de H.