EXERCICE 1 — 8 pts

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3 = f(u_n).$$

1. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   - **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   - **b.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   - **c.** Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

2. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.
   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

3. Étude du cas : $u_0 > 2$.
   À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

EXERCICE 2 **8 pts**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\text{A}(1\ ;\ 0\ ;\ -1),\quad \text{B}(3\ ;\ -1\ ;\ 2),\quad \text{C}(2\ ;\ -2\ ;\ -1)\quad \text{et}\quad \text{D}(4\ ;\ -1\ ;\ -2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 0\\ y &=& 2+t\\ z &=& -1+t \end{array}\right.,\ \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
   b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
   Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D ?
   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x+y-z-3=0$.
2. **a.** Calculer la distance CD.
   b. Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $\text{MD} = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

   Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
   b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
   c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

EXERCICE 3 **2 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal et l'on considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t\\ y = 2-3t\\ z = 4t \end{array}\right.,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -5t'+3\\ y = 2t'\\ z = t'+4 \end{array}\right.,\ t' \in \mathbb{R}$$

Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont elles coplanaires ? Justifier.

EXERCICE 4 **2 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
Les points B et C ont pour coordonnées respectives : $\text{B}(-2\ ;\ -6\ ;\ 5)$ $\text{C}(-4\ ;\ 0\ ;\ -3)$
On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).
Soit t le réel tel que $\overrightarrow{\text{BH}} = t\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{\text{BO}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}}{\left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\|^2}$.
2. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.