EXERCICE 1

Corrigé DS n° 4

Partie A Etude d'une fonction auxiliaire : $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$.

1. • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x) & = & +\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\,x\mathrm{e}^x = +\infty$

   D'où par somme avec "$-\mathrm{e}$" : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

   • Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = \left(1+\dfrac{2}{x}\right)x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$

   $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x\mathrm{e}^x) & = & 0 \text{ (crois. comparée)} \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)x\mathrm{e}^x = 0$

   D'où par somme avec "$-\mathrm{e}$" : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\mathrm{e}$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = (1)(\mathrm{e}^x) + (x+2)\mathrm{e}^x = (x+3)\mathrm{e}^x$
   Or $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $g'(x)$ est du signe de $x+3$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
g	$-e$	$\searrow$	$-e^{-3}-e$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) • $g(x) < -e < 0$ sur $]-\infty;-3]$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solutions sur cet intervalle.

   • g est continue car dérivable sur $I = [-3;+\infty[$
   g est strictement croissante sur I.
   Donc la fonction g réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle image $J = [-e^{-3}-e;+\infty[$.
   Or $0 \in J$, donc 0 admet un et un seul antécédent par g sur I.

   Bilan : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$

   (b) On en déduit, d'après les variations de g, le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

   (c) Par dichotomie, on obtient à la calculatrice : $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$

Partie B Etude de la fonction $f(x) = \mathrm{e}x^2 - 2x^2\mathrm{e}^x$

1. • $f(x) = x^2\left(\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^x\right)$

   $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}-2\mathrm{e}^x\right) & = & -\infty \end{array}\right\} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   • $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2\mathrm{e}^x & = & 0 \text{ (croissance comparée)} \end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
   $\forall x \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}x - 2\left(2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x\right) \\ &= 2\mathrm{e}x - 2x\,(2+x)\,\mathrm{e}^x \\ &= 2x\left[\mathrm{e} - (2+x)\,\mathrm{e}^x\right] \\ &= -2xg(x) \end{aligned}$$
   Ainsi $f'(x)$ est du signe de $-xg(x)$ sur $\mathbb{R}$

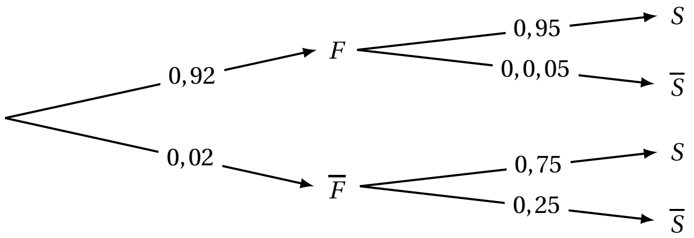
x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3. $f(\alpha) = e\alpha^2 - 2\alpha^2\mathrm{e}^\alpha$.
   Or $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^\alpha - e = 0 \iff \mathrm{e}^\alpha = \dfrac{e}{\alpha+2}$
   D'où : $f(\alpha) = e\alpha^2 - 2\alpha^2\dfrac{e}{\alpha+2} = e\alpha^2\left(1-\dfrac{2}{\alpha+2}\right) = e\alpha^2\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2}\right) = \dfrac{e\alpha^3}{\alpha+2}$

Exercice 2

1. (a) L'énoncé donne : $p(F) = 0,92$, $p_F(S) = 0,95$, et $p(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,02$

   (b) $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{p(\overline{F} \cap \overline{S})}{p(\overline{F})} = \dfrac{0,02}{1-0,92} = \dfrac{1}{4}$

   (c) 

2. (a) F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(F \cap S) + p\left(\overline{F} \cap S\right) \\ &= p(F) \times p_F(S) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(S) \\ &= 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 \\ &= 0,934. \end{aligned}$$

   (b) On cherche $p_S(F)$

$$p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{P(S)} = \frac{0,92 \times 0,95}{0,934} \approx 0,936.$$

Exercice 3

Partie A :

1. VRAI car $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ car $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sur $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$.

$$= \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

2. $$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{CJ}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CJ}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CJ}} = 0 \quad \text{car} \overrightarrow{\mathrm{CJ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \\ &= AB \times IC \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right) \end{aligned}$$

   Or $\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right) = \dfrac{IB}{IC} \neq \dfrac{1}{2}$ car $IC \neq 1$

   Donc $\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \overrightarrow{\mathrm{IC}}\right) \neq \cos\dfrac{\pi}{3}$

   Ainsi l'affirmation n° 2 est FAUSSE.

3. En prenant la base EFI et la hauteur CB, on a $\mathscr{A}(\mathrm{EFI}) = \dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   Donc $\mathrm{V(EFIJ)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$.

   Ainsi l'affirmation n° 3 est VRAIE.

Partie B :

a/ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ}) \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{DB}$

or $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ (perpendicularités des diagonales d'un carré)

et $\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ car $(GJ) \perp (ABC)$ et $(DB) \subset (ABC)$

Conclusion : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$

b/ $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{CJ}$

or $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ car $(AE) \perp (ABC)$ et $(AC) \subset (ABC)$

De même $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= a \times \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}AC \times AC \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}AC^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(2a^2) = \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

Partie C :

1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. $\overrightarrow{\mathrm{SB}} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ 1-(-1) \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SA}} : \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-1 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{\mathrm{SA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = 3 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-2) \times (-4) = 18$

   de plus $\mathrm{SA}^2 = 2^2 + (-2)^2 + (-4)^2 = 24$ donc $\mathrm{SA} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

   De même on calcule $\mathrm{SB} = \sqrt{17}$.

   $\overrightarrow{\mathrm{SA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SB}} = \mathrm{SA} \times \mathrm{SB} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{ASB}}\right)$

   Donc $18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{ASB}}\right)$

   et donc $\cos\left(\widehat{\mathrm{ASB}}\right) = \dfrac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \dfrac{9}{\sqrt{102}}$

   On en déduit que $\widehat{\mathrm{ASB}} \approx 27,0°$.

3. **Bonus !**

- Montrons que la droite (SH) est orthogonale au plan (ABC).

Il suffit de montrer que $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABC).

$\overrightarrow{SH} : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{SH} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{SH}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est orthogonal au plan (ABC).

- Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On cherche s'il existe deux réels α et β tels que : $\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AH} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & \alpha - 2\beta \\ 3 & = & 5\beta \\ 3 & = & 2\alpha + \beta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \dfrac{6}{5} \\ \beta & = & \dfrac{3}{5} \\ 3 & = & \dfrac{12}{5} + \dfrac{3}{5} \end{array} \right.$$

La dernière égalité est vraie donc on a : $\overrightarrow{AH} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

- Bilan :

H appartient au plan (ABC) car $\overrightarrow{AH}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
De plus (SH) est orthogonale au plan (ABC).
Donc H est le projeté orthogonal de S sur (ABC).