EXERCICE 1 **9 pts**

Partie A Etude sur $\mathbb{R}$ d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}$

1. Etudier les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. **a.** Montrer que la dérivée de g est du signe de $x+3$ sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique, que l'on notera α.
   b. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B Etude sur $\mathbb{R}$ de la fonction principale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}\,x^2 - 2x^2\mathrm{e}^x$

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. **a.** Justifier que $f'(x)$ est du signe de $-xg(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{e\,\alpha^3}{\alpha+2}$

EXERCICE 2 **4 pts**

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

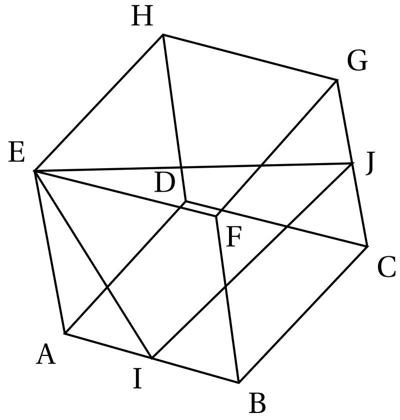
- F l'évènement : « le jouet est sans défaut de finition » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité ».

1. **a.** Traduire les trois données numériques de l'énoncé en termes de probabilités.
   b. Démontrer que $p_{\overline{\mathrm{F}}}\left(\overline{\mathrm{S}}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   c. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. **a.** Démontrer que $p(\mathrm{S}) = 0,934$.
   b. Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)

Tournez svp !

EXERCICE 3 **7 points**

Partie A



On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes [AB] et [CG].

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, **en justifiant votre réponse**.

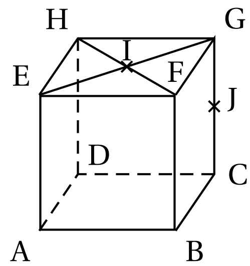
Affirmation n° 1 : $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{AI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Affirmation n° 2 : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{IC} \times \cos \dfrac{\pi}{3}$

Affirmation n° 3 : Le volume du tétraèdre EFIJ est égal à $\dfrac{1}{6}$.

Partie B

ABCDEFGH est un cube d'arête a. I est le le centre de la face EFGH, et J est le milieu de l'arête [GC]



Calculer les produits scalaires suivants **sans utiliser de repère!**

a/ $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{DB}$ **b/** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$

Partie C

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2\,;\,-1\,;\,0),\ \ \mathrm{B}(3\,;\,-1\,;\,2),\ \ \mathrm{C}(0\,;\,4\,;\,1)\ \text{ et }\ \mathrm{S}(0\,;\,1\,;\,4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ASB}}$ arrondie au dixième de degré.
3. **Bonus 1 point** On considère le point H(2 ; 2 ; 3). Montrer que H est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).