Corrigé DS n° 3

Exercice 1

1. • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{-x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ (limite **à l'infini** d'une **fonction rationnelle**)

   De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

   • tableau de signe de $4-x$:

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	0	$-$	

   • $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}(4-x) & = & 0^+\\ \lim\limits_{x\to4}(x^2-7x+16) & = & 4\end{array}\right\} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x) = +\infty$

   $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}(4-x) & = & 0^-\\ \lim\limits_{x\to4}(x^2-7x+16) & = & 4\end{array}\right\} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = -\infty$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 4$ est asymptote à $(\mathscr{C})$

3. (a) f est dérivable sur D_f en tant que fonction rationnelle définie sur cet intervalle.

   $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{(2x-7)(4-x)-(-1)(x^2-7x+16)}{(4-x)^2}$

   $= \ \dots\ = \dfrac{-x^2+8x-12}{(4-x)^2}$

   (b) Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
$-x^2+8x-12$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(4-x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

4. On résout $f'(x) = -1$ sur D_f.

   $f'(x) = -1 \iff \dfrac{-x^2+8x-12}{(4-x)^2} = -1$

   $\iff -x^2+8x-12 = -(4-x)^2$

   $\iff -x^2+8x-12 = -x^2+8x-16$

   $\iff -12 = -16$

   Cette équation n'a pas de solution, donc la courbe $\mathscr{C}$ n'admet pas de tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x$.

Exercice 2

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

   d'où : $3 \leqslant \sin x + 4 \leqslant 5$

   d'où : $\dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{1}{\sin x+4} \geqslant \dfrac{1}{5}$ (fonction inverse décroissante sur $]0;+\infty[$)

   d'où pour x négatif (vu que l'on cherche la limite en $-\infty$) :

   $\dfrac{5x}{3} \leqslant \dfrac{5x}{\sin x+4} \leqslant x$

   Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(x) = -\infty$ d'où par comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. $g(x) = -x+3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{-x\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^x-2}{\mathrm{e}^x}$

   $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\mathrm{e}^x\right) & = & 0 \text{ (croissance comparée)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(3\mathrm{e}^x-2\right) & = & -2\end{array}\right\} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^x-2\right) = -2$

   Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x\right) = 0^+$

   D'où par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{1-\mathrm{e}^x}$.

   $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{e}^{-5x}\right) & = & 1\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\mathrm{e}^x\right) & = & 0^-\end{array}\right\} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to0^+} h(x) = -\infty$

Exercice 3

1. (a) $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x+2}{\mathrm{e}^{x}}=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x}}$

$$\left.\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right) & = & 0 \quad \text{(croissance comparée)}\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\mathrm{e}^{x}}\right) & = & 0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Donc l'axe des abscisses d'équation $y=0$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

(b) $f(x)=0 \iff (x+2)\mathrm{e}^{-x}=0 \iff x+2=0 \iff x=-2$

Donc la courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse -2.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=(1)\mathrm{e}^{-x}+(x+2)(-\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^{-x}(1-x-2)=(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$

$f'(-2)=\mathrm{e}^{2}$ et $f(-2)=0$

Equation de la tangente T_{-2} :
$$\begin{aligned} y&=\mathrm{e}^{2}(x-(-2))+0\\ y&=\mathrm{e}^{2}(x+2)\\ y&=\mathrm{e}^{2}x+2\mathrm{e}^{2}\end{aligned}$$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0}(x) = 0\\[2ex] \left.\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x} & = & +\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{X\to+\infty}(1+\mathrm{e}^{X}) & = & +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} h(x)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to0}(x) = 0\\[2ex] \left.\begin{array}{lcl}\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{1}{x} & = & -\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{X\to-\infty}(1+\mathrm{e}^{X}) & = & 1\end{array}\right\}\Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = 1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} h(x)=0$$

Exercice 4

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\6\\2\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\6\\4\end{pmatrix}$

$\dfrac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}=\dfrac{6}{6}=1 \qquad \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}=\dfrac{4}{2}=2\neq1$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C non alignés définissent un plan.

2. Montrons que $\overrightarrow{MN}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MN}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{lcl}0\alpha-3\beta&=&-1\\6\alpha+6\beta&=&1\\2\alpha+4\beta&=&1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha&=&-\dfrac{1}{6}\\[1ex]\beta&=&\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Ainsi $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{1}3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont coplanaires.

3. Testons si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont coplanaires.

$\overrightarrow{AN}\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

On cherche un couple de réels $(\alpha;\beta)$ tels que : $\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \iff \left\{\begin{array}{lcl}0\alpha-3\beta&=&1\\6\alpha+6\beta&=&4\\2\alpha+4\beta&=&3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\alpha&=&1\\\beta&=&-\dfrac{1}{3}\\[1ex]2-\dfrac{4}{3}&=&3\end{array}\right.$$

Il n'y a pas de solution car $2-\dfrac{4}{3}\neq3$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN}$ ne sont pas coplanaires, donc le point N n'appartient pas au plan (ABC).

4. La droite (MN) est parallèle au plan (ABC) car le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est coplanaire à $\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AC}$. Comme de plus le point N n'appartient pas au plan (ABC), on peut préciser que (MN) est strictement parallèle au plan (ABC) (car non incluse dans ce plan).

Exercice 5

1. $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AR}$

   $= \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AD}$

   $= \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

2. $\overrightarrow{DS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AD}$

   $= 3\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AD}$

   $= 3\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

   $= 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD}$

3. On remarque que :

   $$6\overrightarrow{DR} = 6\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DS}$$

   Donc $\overrightarrow{DR}$ et $\overrightarrow{DR}$ sont colinéaires, les points D, R, et S sont donc alignés.

Exercice 6

- Déterminons les coordonnées du point d'intersection N de $\mathscr{C}$ et T_a, tangente à $\mathscr{C}$ en M.

  Equation de T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ soit $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$.

  $y = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^a(x-a+1) = 0 \Leftrightarrow x - a + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - a$

- Calculons la distance PN : $P(a;0)$ $N(1-a;0)$ $PN = 1 =$ constante.